Sommersemester 2002
Prof. Dr. R.-D. Grigorieff
Dr. T. Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

# Klausur Numerische Mathematik I für Ing.

**BITTE DIESES FELD IN DRUCKSCHRIFT AUSFÜLLEN:**

| | | | |
|---|---|---|---|
| Name: | | Vorname: | |
| Matrikel-Nr.: | | Studiengang: | |

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (letzten drei Stellen der Matrikel-Nr. und Punktzahl) am schwarzen Brett vor dem MA 480 bin ich einverstanden (wenn ja bitte unterschreiben, sonst nicht):

Unterschrift: ......................................................................

---

**Bitte dieses Feld NICHT ausfüllen:**

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Summe | Zul. | Note |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Punkte | | | | | | | | | | | |
| max. Pkte. | **4** | **8** | **6** | **8** | **6** | **4** | **8** | **6** | **50** | | |
| Korrektor | | | | | | | | | | | |

**WICHTIGE HINWEISE:**

- **Zum Bestehen der Klausur sind 25 von 50 Punkten erforderlich.**
- **Als Hilfsmittel sind nur Stift und Papier zugelassen! Keine Taschenrechner! Keine Handys!**
- **Bitte den Ausweis für Studierende und einen amtlichen Lichtbildausweis bereit halten!**
- **Aushang der Ergebnisse am schwarzen Brett vor dem MA 480 ab Donnerstag, 4.7.02. Dort wird auch der Einsicht- bzw. Rückgabetermin bekanntgegeben.**

---

**KLAUSURAUFGABEN:**

1. **Aufgabe:** (**4** Punkte)

   Wie sieht die allgemeine Form eines Einschrittverfahrens zur Lösung eines Anfangswertproblems

   $$y' \;=\; f(t,y),\; t \geq t_0, \quad y(t_0) = y_0$$

   aus?

2. **Aufgabe:** (**8** (4+4) P.)

   (a) Reduziere das Anfangswertproblem

   $$\ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega^2 x \;=\; f(t), \quad t \geq 0, \qquad x(0) = 0, \dot{x}(0) = 1$$

   auf ein Anfangswertproblem für ein System erster Ordnung.

   (b) Schreibe für dieses System die Iterationsvorschrift des einfachen Eulerverfahrens mit konstanter Schrittweite auf.

3. **Aufgabe:** (**6** P.)
   Bestimme die Genauigkeit des zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung
   $$D_{2x}u(x) \quad := \quad \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \tag{1}$$
   Das heißt: Bestimme $k \in \mathbb{N}$ so, dass
   $$D_{2x}u(x) \quad = \quad u''(x) + \mathcal{O}(h^k)$$
   gilt. Dabei kann die Funktion $u$ als beliebig oft differenzierbar angenommen werden.

4. **Aufgabe:** (**8** P.)
   Das Randwertproblem
   $$-u''(x) + c(x)u'(x) = x, \quad x \in (0,1), \quad u(0) = \alpha, u(1) = \beta$$
   soll mit einem Differenzenverfahren auf dem Gitter $x_i = ih, i = 0, \ldots, n$ für die Schrittweite $h = 1/n$ gelöst werden.
   Hierbei ist $c : [0,1] \to \mathbb{R}$ eine beliebige vorgegebene Funktion.
   Die erste Ableitung soll durch den zentralen Differenzenquotienten erster Ordnung,
   $$\delta_x u(x) \quad := \quad \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h},$$
   die zweite Ableitung durch den zentralen Differenzenquotienten zweiter Ordnung, vgl. Formel (1) in Aufgabe 3, approximiert werden.
   Stelle das sich ergebende Gleichungssystem für die Werte der Näherungslösung $u_i \approx u(x_i)$ auf.

5. **Aufgabe:** (**6** (2+2+2) P.)
   (a) Berechne die Kondition von $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$ bezüglich einer beliebigen Matrixnorm.
   Hinweis: Für $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ gilt: $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$.
   (b) Wodurch kann man die Kondition einer Matrix beeinflussen und welcher Wert der Kondition wird dabei angestrebt?
   (c) Skaliere $A$ durch Rechts-Multiplikation mit einer Diagonalmatrix so, dass die Summen der Beträge in allen Spalten gleich sind. Es genügt, die Diagonalmatrix anzugeben.

6. **Aufgabe:** (**4** P.)
   Es liege eine $LR$-Zerlegung von $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ vor. Wie benutzt man $L$ und $R$, um das lineare Gleichungssystem $Ax = b$ zu lösen?

7. **Aufgabe:** (**8** P.)
   Schreibe den Pseudocode einer Funktion, die die Nullstelle einer **beliebigen** Funktion
   $$F \quad : \quad \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
   mit dem Newtonverfahren zu einem beliebigen Startwert $x^0$ approximiert.
   - Das Verfahren soll abbrechen, wenn der Betrag des Funktionswertes kleiner als eine vorgegebene Schranke $\varepsilon$ ist.
   - Wähle selbst die notwendigen Eingabeparameter **und beschreibe, was sie bedeuten!**
   - Die Funktion soll die Approximation der Nullstelle zurückgeben.
   - Im Newtonverfahren sollen keine inversen Matrizen berechnet, sondern die entsprechenden linearen Gleichungssysteme gelöst werden. Dies kann z. B. in der Form

     `löse Ax=b` oder in Matlab-Notation `x = A\b`

     geschehen.

8. **Aufgabe:** (**6** P.)
   In der Vorlesung wurden vier verschiedene Fehlerarten, die in der Numerischen Mathematik eine Rolle spielen, vorgestellt. Nenne sie und gib für zwei von ihnen ein Beispiel an (in Stichworten).