Sommersemester 2002
Prof. Rolf-Dieter Grigorieff
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

7. Übungsblatt – Numerische Mathematik I für Ing.

`www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe02/Num_1_Ing`

- Aufgaben für die Tutorien in der Woche vom 27.-31.5.:

  Wir betrachten Matrizeneigenwertprobleme der Form

  $$Ax = \lambda x. \tag{1}$$

  Sie sind ein Spezialfall der verallgemeinerten Matrizeneigenwertprobleme $Ax = \lambda Bx$, die auf dem letzten Übungsblatt auftauchten.

  1. (a) Was ist die Definition von Eigenwerten (EW) und -Vektoren (EV)?
     (b) Wie berechnet man sie analytisch?
     (c) Wann sind EW/EV reell, wann können sie komplex sein?
     (d) Sind EW/EV eindeutig bestimmt?
     (e) Wenn die EW/EV von einer Matrix A bekannt sind, was sind die EW/EV von $\mu A (\mu \in \mathbb{R}), A^{-1}, (A - \mu I)^{-1}$?
  2. Matlab/Scilabs `eig(A)` bzw. `spec(A)` berechnen *alle* EW und EV von (1) mit dem QR-Algorithmus (vgl. VL).
  3. Die einfache Vektoriteration berechnet *nur den betragsgrößten* EW λ_{max} und einen zugehörigen EV x:

     $$q^{(0)}, \varepsilon > 0 \text{ gegeben}, k = 1. \qquad \text{Berechne} \quad \begin{aligned} z^{(k)} &= Aq^{(k-1)} \\ q^{(k)} &= \frac{z^{(k)}}{\|z^{(k)}\|_2} \\ \lambda^{(k)} &= (q^{(k)})^T A q^{(k)} \\ \text{bis } |\lambda^{(k)} - \lambda^{(k-1)}| &\leq \varepsilon. \end{aligned} \tag{2}$$

     Es gilt unter gewissen Voraussetzungen (vgl. VL): $\lambda^{(k)} \to \lambda_{max}, q^{(k)} \to x$ (EV).
  4. Wie lauten die Definitionen der Vektornormen $\|\cdot\|_1, \|\cdot\|_2, \|\cdot\|_\infty$? Wie berechnet man sie in Matlab/Scilab?

- Übungsaufgaben: (Abgabe im Tutorium in der Woche vom 3.-7.6.02)

  1. (7 P.)
     Diskretisiere das Eigenwertproblem

     $$u'' + \lambda u = 0, \quad x \in [0,1], \quad u(0) = u(1) = 0$$

     mit Finiten Differenzen auf einem äquidistanten Gitter mit Schrittweite $h = 1/n$. Benutze zur Approximation der zweiten Ableitung den zentralen Differenzenquotienten 2. Ordnung

     $$D_{2x}u(x) = \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}.$$

     – Gib das entstehende Gleichungssystem in Matrix-Vektor-Schreibweise an!
     – Worin unterscheidet sich dieses System von dem (mit Finiten Elementen erzeugten) System aus Aufgabe 4 des 6. Übungsblattes?
  2. (4 P.)
     Mit welcher Matrix an Stelle von A muss man die Vektoriteration (2) durchführen, wenn man den EW von A sucht, der am nächsten an einem vorgegebenen Wert $\mu \in \mathbb{R}$ liegt? Warum?
  3. (5 P.)
     Schreibe den Pseudocode einer Funktion, die die Inverse Vektoriteration (Alg. 31 VL) implementiert. Benutze dieselbe Abbruchbedingung wie in (2).
     – Eingabe:
       ∗ Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$
       ∗ Parameter $\mu \in \mathbb{R}$

    * Startvektor $x^{(0)} \in \mathbb{R}^n$
    * Abbruchschranke ε
  - Ausgabe:
    * Approximation λ des EW
    * Approximation $x \in \mathbb{R}^n$ des EV.

  Wichtig: Es dürfen keine Matrizen invertiert, sondern nur lineare Gleichungssysteme gelöst werden!

4. (1 P.)
   Wie berechnet man mit der Funktion aus Aufgabe 3 den betragsmäßig kleinsten EW einer Matrix A?

5. (Programmieraufgabe - Vorführen in der Woche vom 3.-7.6.02)
   Wir betrachten das Problem aus Aufgabe 1 mit $n = 500$ und wollen nur den betragsmäßig kleinsten EW und einen zugehörigen EV berechnen.
   - Wende Matlabs `eig` bzw. Scilabs `spec` an und messe mit
     ```
     s=cputime;
     ...;
     t=cputime-s
     ```
     die benötigte Rechenzeit.
   - Schreibe die Funktion aus Aufgabe 3.
     Wichtig: Es dürfen keine Matrizen invertiert, sondern nur lineare Gleichungssysteme (mit Matlabs/Scilabs `x = A\b`) gelöst werden!
   - Wende diese Funktion auf das Problem an mit $\varepsilon = 10^{-4}$ an und messe die Rechenzeit.
   - Plotte den exakten und beide approximierten Eigenvektoren in einem Bild.