Sommersemester 2002
Prof. Rolf-Dieter Grigorieff
Thomas Slawig

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

9. Übungsblatt – Numerische Mathematik I für Ing.

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe02/Num_1_Ing

Die Klausur beginnt am Dienstag, 2.7.02 14.00 Uhr im MA 005! Einlass ab 13.50 Uhr!
In der Woche vom 17.-21.6.02 finden Tutorien zur Wiederholung statt!
In der Woche vom 24.-28.6.02 finden keine Tutorien mehr statt!

- Aufgaben für die Tutorien in der Woche vom 10.-14.6.:

  Auf diesem Blatt geht es um die Lösung von *nichtlinearen* Gleichungen und Gleichungssystemen:

  1. (a) Schreibe das System
  $$\begin{aligned} x_1^2 + x_2^2 &= 1 \\ x_1^2 - x_2 &= 0 \end{aligned}$$
  als Fixpunktgleichung
  $$F(x) = x$$
  mit $x = (x_1, x_2)$ und gib die Vorschrift der Fixpunktiteration an. Rechne für den Startvektor $x^0 = (1, 1)$ die erste Iterierte aus.

     (b) Schreibe das System als Nullstellenproblem
  $$F(x) = 0$$
  und gib die Iterationsvorschrift des Newtonverfahrens an. Rechne für den Startvektor $x^0 = (1, 1)$ die erste Iterierte aus. Für welche Werte von x ist die Funktional- (oder Jacobi-) Matrix $DF(x)$ regulär?

     (c) Zeige grafisch, dass das System genau zwei Lösungen hat und gib sie an.

  2. Wir betrachten das nichtlineare Randwertproblem
  $$\begin{aligned} u'' &= c(x)u + h(x,u) \qquad x \in (0,1) \\ u(0) &= \alpha, \quad u(1) = \beta. \end{aligned}$$

     (a) Es sei
  $$h(x,u) := u + u^2.$$
  Gib das nichtlineare Gleichungssystem an, das bei der Diskretisierung des Problems auf dem Gitter $x_i = ih, i = 1, \dots, N$ mit dem zentralen Differenzenquotienten 2. Ordnung für die 2. Ableitung entsteht:
  $$D_{2x}u(x) := \frac{u(x+h) - 2u(x) + u(x-h)}{h^2}. \qquad (1)$$

     (b) U sei der Vektor der Näherungslösung. Schreibe das System aus (a) in der Form
  $$F(U) = BU + H(U) + G = 0 \qquad (2)$$
  wobei B eine bezüglich U konstante Matrix und G ein konstanter Vektor ist. Wie sieht die vektorwertige, nichtlineare Funktion $H(U)$ aus? Gib sie komponentenweise in der Form
  $$H_i(U) = \dots, \quad i = 1, \dots, n$$
  an!

     (c) Gib das Schema der Fixpunktiteration und des Newtonverfahrens an. Benutze dabei die oben definierte Funktion F. Wie sieht die beim Newtonverfahren benötigte Funktionalmatrix aus?

- Übungsaufgaben: (Abgabe im Tutorium in der Woche vom 17.-21.6.02)

  1. (16 P.)
  Wir betrachten die stationäre *Burgersgleichung*
  $$\begin{aligned} -\nu u'' + uu' &= g \qquad x \in (0,1) \\ u(0) &= \alpha \\ u(1) &= \beta. \end{aligned}$$
  Sie kann als eindimensionale Form der Navier-Stokes-Gleichungen interpretiert werden, die die Strömung von inkompressiblen Flüssigkeiten und Gasen (Fluiden) beschreiben. Der Parameter $\nu > 0$ entspricht dabei der Zähigkeit (Viskosität) des Fluids. Die Funktion g kann von x abhängen.

(a) Diskretisiere die Burgersgleichung mit zentralen Differenzenquotienten, d.h. benutze (1) für die zweite und

$$\delta_x u(x) \quad := \quad \frac{u(x+h) - u(x-h)}{2h}$$

für die erste Ableitung. Benutze ein äquidistantes Gitter der Schrittweite $h = \frac{1}{N}$. Welches nichtlineare Gleichungssystem ergibt sich? Schreibe es in der Form (2)!

(b) Gib die Verfahrensvorschrift des Newtonverfahrens für dieses System an! Benutze die oben definierte Funktion F!

(c) Gib die Funktionalmatrix an!

(d) Ist sie symmetrisch?

2. (2 P.)
Die Burgersgleichung soll mit dem Newtonverfahren gelöst werden. Die beiden Differenzenquotienten D_{2x} und δ_x approximieren die zweite bzw. erste Ableitung mit der Genauigkeit $\mathcal{O}(h^2)$. Welche Genauigkeit in der Näherungslösung kann man also bei der Diskretisierung aus Übungsaufgabe 1 bei $N = 100$ erwarten? Wie sollte man daher die Abbruchbedingung beim Newtonverfahren wählen?

3. (Programmieraufgabe – Vorführen in der Woche vom 17.-21.6.02)

(a) Schreibe eine Funktion, die für ein *beliebiges* System nichtlinearer Gleichungen das Newtonverfahren realisiert!

- Eingabeparameter:
  - Funktion F, deren Nullstelle x^* gesucht wird,
  - Funktion, die für gegebenes x die Funktionalmatrix $DF(x)$ zur Verfügung stellt,
  - Startvektor x^0,
  - Abbruchschranke ε (Abbruch, wenn $\|x^{k+1} - x^k\|_2 \leq \varepsilon$),
  - Anzahl k_{max} der maximal durchzuführenden Newtonschritte.
- Ausgabe:
  - Approximation der Nullstelle x^*,
  - Anzahl k der durchgeführten Newtonschritte.

Es ist darauf zu achten, dass keine Matrizen invertiert, sondern nur lineare Gleichungssysteme gelöst werden!

(b) Wende diese Funktion auf die Burgersgleichung mit $\nu = 0.25, \alpha = \beta = 0, f \equiv 1$ und $n = 100$ oder $n = 200$ an. Wähle als Startvektor den Nullvektor und eine sinnvolle Abbruchschranke ε! Plotte die Lösung!