TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 2002

Institut für Mathematik

Dozent und Übungsleiter: Arnd Rösch

FEM

Partielle Differentialgleichungen - 11. Übung

1. (Vorrechenaufgabe) Sei u die schwache Lösung einer Randwertaufgabe mit $\Delta u = 0$. Außerdem gelte $u|_\Gamma \leq M$ fast überall. Zeigen Sie, daß dann auch $u \leq M$ f.ü. auf Ω gilt (Schwaches Maximumprinzip). Hinweis: Verwenden Sie als Testfunktion $\varphi = (u-M)^+$. Diese Funktion ist 0, falls $u < M$ gilt, und $u - M$ sonst. Verwenden Sie dabei, daß diese Funktion zu $H^1(\Omega)$ gehört.

2. Im Hilbertraum V sei ein Randwertproblem in schwacher Formulierung

$$a(u,v) = f(v) \qquad \forall v \in V \tag{1}$$

gegeben. Dabei seien $a(.,.)$ eine Bilinearform mit $|a(u,v)| \leq \mu_1 \|u\| \|v\|$,
$a(v,v) \geq \mu_2 \|v\|^2$ $\forall u,\, v \in V$, und $f \in V^*$. (1) werde näherungsweise mittels FEM gelöst, der Raum der FEM–Basisfunktionen sei $V_h \subset V$. Es seien u die Lösung von (1) und u_h die FEM– Näherungslösung, d. h.

$$a(u_h, v_h) = f(v_h) \qquad \forall v_h \in V_h.$$

Beweisen Sie folgende Fehlerabschätzung (Lemma von Céa):

$$\|u - u_h\| \leq \frac{\mu_1}{\mu_2} \inf_{v_h \in V_h} \|u - v_h\|.$$

3. Im Quadrat Ω der Seitenlänge 3 sei das Randwertproblem

$$\begin{aligned} -\Delta u + u &= f \qquad \text{in } \Omega, \\ u &= 0 \qquad \text{auf } \partial\Omega \end{aligned}$$

mittels FEM–Approximation zu lösen. Das Gebiet sei auf die dargestellte Weise vernetzt. Berechnen Sie die zum mit “*“ gekennzeichneten Element gehörige Elementmatrix (Beachten Sie die Gestalt der Bilinearform !).

*