

**Elementare Lösungsmethoden**

## Partielle Differentialgleichungen - 5. Übung

**Wiederholung:** Lineare gewöhnl. Dgl. 2. Ordnung mit konstanten Koeffizienten, Sturm–Liouvillesche Eigenwertprobleme, Fourierreihen

1. (Vorrechenaufgabe) Beweisen Sie Lemma 2 aus dem Abschnitt 3.1.3 (Spiegelungsmethode).

2. (Vorrechenaufgabe) Lösen Sie die folgende Aufgabe mit Hilfe der Spiegelungsmethode  
Eine Saite der Länge  $l$  bewege sich entsprechend der Gleichung

$$u_{tt} - u_{xx} = 0 \quad (0 < x < l, t > 0),$$

wobei  $u$  die Auslenkung der Saite aus der Ruhelage bedeutet. Dabei seien folgende Anfangs- und Randbedingungen gestellt:

- a) Die Saite sei an beiden Enden eingespannt und habe zum Zeitpunkt  $t = 0$  die Auslenkung  $u(0, x) = \sin \frac{x\pi}{l}$  und die Anfangsgeschwindigkeit 0.
- b) Das rechte Ende sei eingespannt, das linke soll frei schwingen. Anfangsauslenkung und -geschwindigkeit seien durch  $u(0, x) = u_t(0, x) = \cos \frac{x\pi}{2l}$  gegeben.

3. (Vorrechenaufgabe) Geben Sie Eigenwerte und dazugehörige Eigenfunktionen zu den folgenden Sturm–Liouville–Problemen an:

a)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y(0) = 0, \quad y'(1) = 0$

b)  $y'' + \lambda y = 0, \quad y'(0) = 0, \quad y'(1) = 0.$

4. (Vorrechenaufgabe) Lösen Sie folgendes Anfangsrandwertproblem zur Wärmeleitgleichung mit Hilfe der Fouriermethode:

$$u_t(t, x) - u_{xx}(t, x) = 0, \quad 0 < x < \pi, t > 0,$$

$$u(0, x) = \sin x,$$

$$u(t, 0) = u(t, \pi) = 0.$$

5. Lösen Sie folgende Anfangs- und Randwertaufgabe zur Wellengleichung mit Hilfe der Fouriermethode (Achtung: Aufgabe wird auf dem nächsten Übungsblatt fortgesetzt.)

$$u_{tt}(x, t) - a^2 u_{xx}(x, t) = 0, \quad x \in (0, \pi), t > 0$$

$$u(x, 0) = x^2 - \pi^2, \quad u_t(x, 0) = 1$$

$$u_x(0, t) = 0, \quad u(\pi, t) = 0$$