TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner
Ausgabe: 3.7.2003 in der Übung
Abgabe: 15.7. 2003 in der Vorlesung

10. Übung Funktionentheorie I

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/Funktionentheorie_I

(Laurentreihen)

Ü 1. Aufgabe

Für $a \in \mathbb{D}$ sei $h_a(z) := \dfrac{z+a}{1+\bar{a}z}$. Zeigen Sie:
a) h_a ist analytisch in $\mathbb{D}$,
b) $h_a(z) \in \mathbb{D}$ für alle $z \in \mathbb{D}$,
c) für alle $a, z \in \mathbb{D}$ gilt $h_{-a} \circ h_a(z) = z$ und
d) h_a ist ein Automorphismus von $\mathbb{D}$, d.h. $h_a : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ ist bijektiv.

Ü 2. Aufgabe

Geben Sie Laurententwicklungen um 0 für die Funktionen

$$\frac{sinz}{z^3} \qquad \text{und} \qquad \cos\frac{1}{z} \qquad \text{an.}$$

Bestimmen Sie die jeweils Art der Singularität bei 0.

Ü 3. Aufgabe

Gegeben sei die Funktion $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-5z+4}$ $(z \neq 1, 4)$.
Geben Sie Laurententwicklungen für f im Kreisring $A := \{z \ : \ 2 < |z| < 3\}$ an und geben Sie den maximalen Konvergenzbereich dieser Entwicklung an.
(Hinweis: $f(z) = \dfrac{z+2}{z^2-5z+4} = \dfrac{2}{z-4} - \dfrac{1}{z-1}$)

Ü 4. Aufgabe

Bestimmen Sie den Hauptteil der Laurententwicklung um 0 von $\dfrac{1}{(z-1)^2}$ im Kreisring $A := \{z \ : \ 1 < |z| < 3\}$.

H 5. Aufgabe (10 Punkte)

Für $a \in \mathbb{D}$ sei $h_a(z) := \dfrac{z+a}{1+\overline{a}z}$.
Bildet $H := \{h_a \;:\; a \in \mathbb{D}\}$ eine Gruppe bezüglich der Komposition von Abbildungen, d.h ist die Menge H abgeschlossen bzgl. der Komposition und hat jede Abbildung ein Inverses?

H 6. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzbereiche der Laurentreihen

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{(z-1)^{2n}}{n^2+1} \qquad \text{und} \qquad \sum_{n=-\infty}^{\infty} c^n (z-d)^n \text{ mit } c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}, d \in \mathbb{C}.$$

H 7. Aufgabe (10 Punkte)

Es gelte $f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n$ in einem offenen Kreisring um 0. Zeigen Sie: Die Funktion ist f genau dann gerade (ungerade), wenn $a_n = 0$ für alle ungeraden (geraden) Indizes n gilt.

H 8. Aufgabe (10 Punkte)

Entwickeln Sie die folgenden Funktionen in den angegebenen Kreisringen in eine Laurentreihe:
a) $f(z) = \dfrac{4z - z^2}{(z^2-4)(z+1)}$ in $A_1 := \{z \;:\; 1 < |z| < 2\}$ und $A_2 := \{z \;:\; 0 < |z-1| < 1\}$.
b) $f(z) = \dfrac{1}{(z-2)^n}$ in $A_3 := \{z \;:\; 2 < |z|\}$ und $A_4 := \{z \;:\; 0 < |z-2|\}$.

Gesamtpunktzahl: 40