TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner
Ausgabe: 24.4.2003
Abgabe: 8.5. 2003

2. Übung Funktionentheorie I

(Folgen und Reihen)

Ü 1. Aufgabe

Für welche $z \in \mathbb{C}$ existiert der Grenzwert $\lim_{n\to\infty}(z^n + z^{n-2})$?

Ü 2. Aufgabe

Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz.

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i^n}{n}, \qquad \text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1+2i}{\sqrt{6}}\right)^n .$$

Ü 3. Aufgabe

Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{R}$ mit $a_n > 0$. Wenn $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist, dann konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$ absolut.

Ü 4. Aufgabe

a) Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen komplexer Zahlen. Ist die Folge der Partialsummen $s_m := \sum_{n=0}^{m} a_n$ beschränkt und gilt $\lim_{n\to\infty} b_n = 0$ sowie $\sum_{n=1}^{\infty} |b_n - b_{n-1}| < \infty$, so konvergiert die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$.

b) Folgern Sie aus a) das Leibnitzkriterium.

H 5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Für welche $z \in \mathbb{C}$ existieren die folgenden Grenzwerte?

$$\text{i)} \lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n!}, \qquad \text{ii)} \lim_{n\to\infty} \frac{z^n}{n} .$$

b) Man zeige: Eine beschränkte Folge $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen konvergiert in $\mathbb{C}$ genau dann, wenn alle konvergenten Teilfolgen von $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ denselben Grenzwert haben.

H 6. Aufgabe (10 Punkte)

a) Untersuchen Sie die Reihen auf Konvergenz bzw. absolute Konvergenz.

$$\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2+i}{(1+i)^2 n} \qquad\qquad \text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \left((z-n-\frac{1}{2})^2 - \frac{1}{4} \right)^{-1}$$

b) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\sqrt{n+1}}$ konvergent, das Cauchy-Produkt dieser Reihe mit sich selbst aber divergent ist.

H 7. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine Reihe in $\mathbb{C}$ mit $a_n \neq 0$. Der Grenzwert $Q := \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right|$ möge exisieren.

Zeigen Sie: Wenn $Q < 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ absolut konvergent,
wenn $Q > 1$, so ist $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ divergent.

H 8. Aufgabe (10 Punkte)

a) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge in $\mathbb{C}$ mit $\operatorname{Re} a_n > 0$. Konvergieren die Reihen $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} a_n^2$, so konvergiert letztere sogar absolut.

b) Formulieren Sie die Umkehrung dieser Aussage und beweisen bzw. widerlegen Sie diese!

Gesamtpunktzahl: 40