TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner
Ausgabe: 8.5. 2003 in der Übung
Abgabe: 20.5. 2003 in der Vorlesung

3. Übung Funktionentheorie I

(Potenzreihen)

Ü 1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} z^{n(n+1)}$$

den Konvergenzradius 1 hat, und untersuchen Sie das Konvergenzverhalten der Reihe für $z = 1, -1$ und i.

Ü 2. Aufgabe

Finden Sie eine Potenzreihendarstellung der Funktion $f(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$ für $|z| < 1$.

Ü 3. Aufgabe

Finden Sie die Bilder der Koordinatenlinien $\operatorname{Re} z = const$ und $\operatorname{Im} z = const$ unter der Abbildung $z \mapsto e^z$.

Ü 4. Aufgabe

Zeigen Sie, dass $\frac{1}{i} \sinh(iz) = \sin z$ und $\cosh(iz) = \cos z$ gilt.
Leiten Sie mit Hilfe dieser Identitäten Additionstheoreme für $\sinh(a+b)$ und $\cosh(a+b)$ her.

H 5. Aufgabe (10 Punkte)

Bestimmen Sie die Konvergenzradien der folgenden Potenzreihen:

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^n z^n \quad (a \in \mathbb{C})$, ii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a^{n^2} z^n \quad (a \in \mathbb{C})$, iii) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} z^{n!}$

H 6. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass

$$\sec z := \frac{1}{\cos z} = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{E_{2k}}{(2k)!}\, z^{2k}, \qquad \text{für } |z| < \frac{\pi}{2}$$

mit gewissen Konstanten $E_{2k} \in \mathbb{R}$ ist. Die Zahlen E_2, E_4, E_6,... heißen Eulerzahlen. Berechnen Sie E_2, E_4 und E_6!

H 7. Aufgabe (10 Punkte)

Die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ konvergiere in ganz $\mathbb{C}$. Beweisen oder widerlegen Sie die folgenden Varianten des Identitätssatzes für Potenzreihen.
(Der Identitätssatz in der Version des Vorlesungsskripts kann benutzt werden.)

a) Wenn für alle $z \in \mathbb{R}$ gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$, so gilt $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0$ auch für alle $z \in \mathbb{C}$.

b) Wenn $\{z \in \mathbb{C} \; : \; \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = 0\}$ einen Häufungspunkt in $\mathbb{C}$ hat, so gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

c) Wenn $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n = 0$ für unendlich viele $z \in \mathbb{C}$ gilt, so gilt $a_n = 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

H 8. Aufgabe (10 Punkte)

Zeigen Sie, dass die Bilder der Koordinatenlinien $\operatorname{Re} z = \mathit{const}$ ($\operatorname{Im} z = \mathit{const}$) unter der Abbildung $z \mapsto \cos z$ Hyperbeln (Ellipsen) sind.
(Hinweis: Für Ellipsen gilt $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, für Hyperbeln $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, jeweils mit geeigneten $a, b \in R$.)

Gesamtpunktzahl: 40