**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** SS 03
**Fakultät II - Mathematik**
Gündel vom Hofe
Körner
Ausgabe: 15.5.2003 in der Übung
Abgabe: 27.5. 2003 in der Vorlesung

# 4. Übung Funktionentheorie I

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/Funktionentheorie_I/

(Kurven)

---

## Ü 1. Aufgabe

Parametrisieren Sie die folgenden Kurven:
a) die Verbindungsstrecke der Punkte $z_1 = 2-i$ und $z_2 = -1+2i$, durchlaufen von $z_1$ nach $z_2$.
b) ein Stück des Kreises um $M = -3+i$ mit Radius $R = 2$, durchlaufen in mathematisch negativer Orientierung von $z_1 = -5+i$ bis $z_2 = -3+3i$.

## Ü 2. Aufgabe

Gegeben Sei die Kurve $\gamma : [0,2] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} it & \text{für } t \in [0,1] \\ (3t-2)i & \text{für } t \in (1,2] \end{cases}.$$

a) Skizzieren Sie $\gamma$ und zeigen Sie, dass $\gamma$ wirklich eine Kurve ist.
b) Ist $\gamma$ eine glatte Kurve?
c) Berechnen Sie $\dot{\gamma}$.

## Ü 3. Aufgabe

a) Die Kurve $\gamma : [a,b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $\gamma(t) = t + if(t)$, wobei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ eine reellwertige differenzierbare Funktion sei. Man zeige, dass die Länge von $\gamma$ gegeben ist durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{1 + \dot{f}(t)^2}\, dt.$$

## Ü 4. Aufgabe

Man zeige:
Die Menge $M := \{x + i \sin\frac{1}{x} \in \mathbb{C} \ : \ 0 < x \leq 1\} \cup \{x + 0 \cdot i \in \mathbb{C} \ : \ -1 \leq x \leq 0\}$ ist zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend.

## H 5. Aufgabe (10 Punkte)

a) Erörtern Sie den Begriff der Kurve als Äquivalenzklasse von Parametrisierungen. Geben Sie die in diesem Zusammenhang relevanten Definitionen an und illustrieren Sie diese durch geeignete Beispiele.
(Schreiben Sie einen zusammenhängenden, gut lesbaren Text, z.B. im Stil eines Vorlesungsskripts!)
b) Geben Sie eine geeignete Definition, wann eine Kurve im Sinne von a) glatt ist.

## H 6. Aufgabe (10 Punkte)

Gegeben Sei die Kurve $\gamma : [0, 2] \to \mathbb{C}$ mit

$$\gamma(t) = \begin{cases} (t-1)^2(1-i) & \text{für } t \in [0,1] \\ (t-1)^2(1+i) & \text{für } t \in (1,2] \end{cases}.$$

a) Skizzieren Sie $\gamma$ und zeigen Sie, dass $\gamma$ wirklich eine Kurve ist.
b) Ist $\gamma$ eine glatte Kurve?
c) Zeigen Sie, dass $\gamma$ stetig differenzierbar ist!

## H 7. Aufgabe (10 Punkte)

a) Die Kurve $\gamma : [a, b] \subset \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ sei gegeben durch $\gamma(t) = r(t)e^{it}$, wobei $r : [a, b] \to \mathbb{R}^+$ eine reellwertige differenzierbare Funktion sei. Man zeige, dass die Länge von $\gamma$ gegeben ist durch

$$L(\gamma) = \int_a^b \sqrt{r(t)^2 + \dot{r}(t)^2}\, dt.$$

b) Berechnen Sie die Länge der Archimedischen Spirale, die gegeben ist durch $\gamma(t) = ate^{it}$, mit $a > 0$ und $0 \le t \le 2\pi$.

## H 8. Aufgabe (10 Punkte)

Man zeige: Eine offene Menge $M \subset \mathbb{C}$ ist genau dann zusammenhängend, wenn sie wegzusammenhängend ist.

Gesamtpunktzahl: 40