TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe Ausgabe: 5.6.2003 in der Übung
Körner Abgabe: 17.6. 2003 in der Vorlesung

6. Übung Funktionentheorie I

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/Funktionentheorie_I/

(Cauchyscher Intergralsatz und Cauchysche Integralformel)

Ü 1. Aufgabe

Werten Sie die folgende Integrale aus!

$$\text{i)} \int_{|z|=1} \frac{z}{(z-2)^2}\, dz, \qquad \text{ii)} \int_{|z|=2} \frac{e^z}{z(z-3)}\, dz$$

Ü 2. Aufgabe

Berechnen Sie das Integral mit Hilfe der Substitution $z = e^{i\theta}$:

$$\int_0^{2\pi} \frac{1}{2+e^{i\theta}}\, d\theta\ .$$

Ü 3. Aufgabe

Seien $g \subseteq \mathbb{C}$ ein Sterngebiet bzgl. $a \in G$ und $f : G \to \mathbb{C}$ analytisch. Wenn $\gamma \subset G$ eine stückweise glatte, doppelpunktfreie geschlossene Kurve ist, welche a umschließt, so gilt

$$f(a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{f(z)}{z-a}\, dz\ .$$

Ü 4. Aufgabe

Seien L die Strecke $[-R, R]$ auf der reellen Achse und J der Halbkreis in der oberen Halbebene von R nach $-R$.

a) Bestimmen Sie den Wert des Integrals $\displaystyle\int_{L+J} \frac{dz}{z^2+1}$ jeweils für $R < 1$ und für $R > 1$.

b) Zeigen Sie, dass $\displaystyle\int_J \frac{dz}{z^2+1} \to 0$ für $R \to \infty$.

c) Finden Sie den Wert von $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dx}{x^2+1}$.

H 5. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ stetige Funktion. Zeigen Sie:
Wenn für jedes Dreieick $T \subset G$ gilt $\int_{\partial T} f \, dz = 0$, so ist f analytisch in G. (Satz von Morera)

H 6. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $f : G \to \mathbb{C}$ eine im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ analytische Funktion.

a) Folgern Sie aus der Cauchyschen Integralformel, dass für $z \in G$ und "genügend kleines" (was heisst das konkret?) $r > 0$ gilt

$$f(z) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(z + re^{it}) \, dt \, .$$

b) Zeigen Sie, dass für $z \in G$ und "genügend kleines" $r > 0$ gilt

$$|f(z)| \le \max_{0 \le t \le 2\pi} |f(z + re^{it})|.$$

c) Schliessen Sie aus b), dass $|f|$ im Gebiet G kein striktes lokales Maximum haben kann.

H 7. Aufgabe (10 Punkte)

a) Berechnen Sie das Integral mit Hilfe der Substitution $z = e^{i\theta}$:

$$\int_0^{\pi} \frac{1}{1 + \sin^2 \theta} \, dz$$

b) Sei γ der Polygonzug $[0, 2, 2 + 2i, 2i, 0]$. Berechnen Sie

$$\int_\gamma \frac{dz}{(z - \frac{1}{2} - i)(z - 1 - \frac{3}{2}i)(z - 1 - \frac{i}{2})(z - \frac{3}{2} - i)}$$

.

H 8. Aufgabe (10 Punkte)

Formulieren und beweisen Sie die Regel der Partiellen Integration für analytische Funktionen.

Gesamtpunktzahl: 40