TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe Ausgabe: 12.6.2003 in der Übung
Körner Abgabe: 24.6.2003 in der Vorlesung

7. Übung Funktionentheorie I

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/Funktionentheorie_I

(Entwicklung in Potenzreihen)

Ü 1. Aufgabe

Entwickeln Sie die Funktion $\sin^2 z$ in eine Potenzreihe um 0.

Ü 2. Aufgabe

Bestimmen Sie für $a,b \in \mathbb{C}$ mit $|a| < 1 < |b|$ und $m, n \in \mathbb{N}$ den Wert des Integrals

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=1} \frac{d\zeta}{(\zeta - a)^m (\zeta - b)^n}.$$

Ü 3. Aufgabe

Sei f eine ganze Funktion (d.h. analytisch in ganz $\mathbb{C}$) und $\operatorname{Re} f(z) \leq c$ für alle $z \in \mathbb{C}$. Zeigen Sie, dass f konstant ist. (Tip: Betrachten Sie $e^{f(z)}$)

Ü 4. Aufgabe

Seien f und g zwei im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ analytische Funktionen. Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:
i) $f \equiv g$.
ii) Die "Identitätsmenge" $\{z \in G \ : \ f(z) = g(z)\}$ enthält unendlich viele Punkte und hat einen Häufungspunkt in G.
iii) Es gibt einen Punkt $c \in G$ für den gilt: $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

H 5. Aufgabe (10 Punkte)

Sei f eine ganze Funktion. Es gebe Konstanten $A, R > 0$ und $m \in \mathbb{N}$, sodass $|f(z)| \leq A|z|^m$ für $|z| > R$.
Zeigen Sie, dass f ein Polynom vom Grad höchstens m ist.
(Tip: Abschätzung 8.7 im Skript S. 39 unten)

H 6. Aufgabe (10 Punkte)

Das Gebiet $G \subset \mathbb{C}$ enthalte die abgeschlossene Kreisscheibe $B := \{z \in \mathbb{C} : |z| \leq r\}$ und es sei $a \in \partial B$. Es seien f und g in G analytische Funktionen mit $f(a) \neq 0$, $g(a) = 0$, $g'(a) \neq 0$ und $g(z) \neq 0$ für $z \in B \setminus \{a\}$.
Man zeige: Wenn f/g die Potenzreihenentwicklung $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ um 0 hat, so gilt $\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{a_{n+1}} = a$.
(Hinweis : Zeigen Sie mit Hilfe der Integraldarstellung der a_n, dass $\lim_{n\to\infty} |a_n - a \cdot a_{n+1}| = 0$)

H 7. Aufgabe (10 Punkte)

Sei f eine im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ analytische Funktion, die nicht konstant ist. Zeigen Sie:
i) Für jede Zahl $a \in \mathbb{C}$ ist die Menge $f^{-1}(a) := \{z \in G : f(z) = a\}$ diskret (d.h. ohne Häufungspunkte) in G und $f^{-1}(a)$ ist höchstens abzählbar unendlich.
ii) Für jedes Kompaktum $K \subset G$ ist $f^{-1}(a) \cap K$ endlich.

H 8. Aufgabe (10 Punkte)

Seien f und g zwei im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ analytische Funktionen. Zeigen Sie dass die beiden folgenden Aussagen äquivalent sind:
i) Es gibt ein Polynom $p(z)$, sodass $f \equiv g + p$,
ii) Es gibt einen Punkt $c \in G$ für den gilt: $f^{(n)}(c) = g^{(n)}(c)$ für fast alle $n \in \mathbb{N}$ (d.h. für alle bis auf endlich viele n).

Gesamtpunktzahl: 40