TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 03
Fakultät II - Mathematik
Gündel vom Hofe
Körner
Ausgabe: 19.6.2003 in der Übung
Abgabe: 1.7. 2003 in der Vorlesung

8. Übung Funktionentheorie I

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/Funktionentheorie_I

(lokal gleichmäßige Konvergenz)

Ü 1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{z^2 + k^2}$ in $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergent ist.

Ü 2. Aufgabe

Seien f_n und g_n zwei Folgen in $G \subset \mathbb{C}$ analytischer Funktionen.
Man beweise: Konvergiert $f_n \to 0$ lokal gleichmäßig in G und gilt $|g_n(z)| \leq M$ für ein $M > 0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert die Folge $f_n g_n \to 0$ lokal gleichmäßig in G.

Ü 3. Aufgabe

Sei $\mathbb{D} := \{z \ : \ |z| < 1\}$. Zeigen Sie:
i) Die Folge $f_n(z) = \frac{1}{1 - z^n}$ von in $\mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}$ analytischen Funktionen konvergiert in $\mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}$ lokal gleichmäßig gegen die Funktion

$$h(z) = \begin{cases} 1 & \text{für} |z| < 1 \\ 0 & \text{für} |z| > 1 \end{cases}.$$

Ü 4. Aufgabe

Sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet. Eine Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$ heißt *normal konvergent* in G, wenn jeder Punkt in G eine Umgebung U besitzt, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{z \in U} |f_n(z)|$ konvergent ist.
Man zeige: Eine Funktionenreihe $\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ von analytischen Funktionen $f_n : G \to \mathbb{C}$, ist genau dann normal konvergent, wenn $\sum_{n=0}^{\infty} |f_n|$ lokal gleichmäßig konvergent ist.

H 5. Aufgabe (10 Punkte)

Seien f_n und g_n zwei Folgen in $G \subset \mathbb{C}$ analytischer Funktionen.
Man beweise:
Wenn $f_n \to f$ und $g_n \to g$ lokal gleichmäßig in G konvergieren, so konvergiert auch $f_n \cdot g_n \to f \cdot g$ lokal gleichmäßig in G.
Ist zudem noch $g_n(z) \neq 0$ für alle $z \in G$ und alle $n \in \mathbb{N}$, so konvergiert auch $\frac{f_n}{g_n} \to \frac{f}{g}$ lokal gleichmäßig in G. (Hinweis: Man schaue sich die analogen Beweise für Zahlenfolgen an.)

H 6. Aufgabe (10 Punkte)

Es sei $G \subseteq \mathbb{C}$ ein Gebiet und f_0, f_1,... eine Folge analytischer Funktionen in G. Weiter sei $F_n : G \to \mathbb{C}$ eine Stammfunktion von f_n.
Man zeige: Die Folge der Stammfunktionen F_0, F_1,... konvergiert genau dann lokal gleichmäßig in G, wenn die Folge f_0, f_1,... lokal gleichmäßig in G konvergiert und es zudem einen Punkt $c \in G$ gibt, sodass die Folge $F_n(c)$ konvergiert.

H 7. Aufgabe (10 Punkte)

Es seien $f_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,k}(z-c)^n$ $(k \in \mathbb{N})$ Potenzreihen , die alle im Kreis B um c konvergieren. Die Reihe $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} f_k(z)$ sei in B lokal gleichmäßig konvergent.
Man zeige: f hat in B die Potenzreihendarstellung $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(z-c)^n$ mit $b_n = \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k}$. (Weierstraßscher Doppelreihensatz)

H 8. Aufgabe (10 Punkte)

a)Zeigen Sie, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{ikz}}{k^{\alpha}}$ für jedes $\alpha > 1$ in $\mathbb{C}$ lokal gleichmäßig konvergent ist.
b) Sei $\mathbb{D} := \{z \ : \ |z| < 1\}$. Zeigen Sie:
Seien f und g in ganz $\mathbb{C}$ analytische Funktionen. Dann konvergiert die Folge

$$f_n(z) = f(z) + \frac{g(z) - f(z)}{1 - z^n} \quad \text{gegen} \quad G(z) = \begin{cases} g(z) & \text{für} |z| < 1 \\ f(z) & \text{für} |z| > 1 \end{cases}$$

lokal gleichmäßig in $\mathbb{C} \setminus \partial\mathbb{D}$.

Gesamtpunktzahl: 40