**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** SS 03

**Fakultät II - Mathematik**

Gündel vom Hofe Ausgabe: 55.6.2003 in der Übung

Körner Abgabe: 10.7. 2003 in der Vorlesung

# 9. Übung Funktionentheorie I

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe03/Funktionentheorie_I

(Maximumsprinzip)

---

## Ü 1. Aufgabe

Man zeige:

Seien $f$ und $g$ zwei analytische Funktionen in $\overline{D_R(0)} := \{z \ : \ |z| \leq R\}$, die in $D_R(0)$ keine Nullstelle haben. Wenn $|f(z)| = |g(z)|$ für $|z| = R$ ist, so ist $f = c \cdot g$ für ein $c$ mit $|c| = 1$.

## Ü 2. Aufgabe

Man zeige:

Sei $f$ analytisch im beschränkten Gebiet $G$. Dann hat $\operatorname{Re} f$ ($\operatorname{Im} f$) kein lokales Extremum in $G$. (Tip: Betrachte $e^f$ und $e^{-f}$)

## Ü 3. Aufgabe

Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (z-c)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $> r$ und $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)|$.

Man zeige: Es gilt

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|^2 r^{2k} \leq M(r)^2 \ .$$

## Ü 4. Aufgabe

Sei $f$ analytisch in $\mathbb{D} := \{z \ : \ |z| < 1\}$ und erfülle $f(0) = 0$, $|f(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$.

a) Dann ist $g(z) := \dfrac{f(z)}{z}$ in $z = 0$ analytisch ergänzbar und es gilt $|g(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$.

b) Wenn zudem $f^{(k)}(0) = 0$ für $k = 1, ..., N-1$ ist, so ist $\dfrac{f(z)}{z^N}$ in $z = 0$ analytisch ergänzbar und es gilt auch $\left|\dfrac{f(z)}{z^N}\right| \leq 1$ für $|z| < 1$.

**H 5. Aufgabe** (10 Punkte)

Beweisen Sie das folgende Minimumsprinzip:
Sei $G \subset \mathbb{C}$ ein beschränktes Gebiet und $f : \overline{G} \to \mathbb{C}$ stetig in $\overline{G}$ und analytisch in $G$. Dann hat $f$ entweder (mindestens) eine Nullstelle in $G$ oder $|f|$ nimmt sein Minimum auf $\partial G$ an. (Hinweis: Man wende das Maximumsprinzip auf $1/f$ an.)

**H 6. Aufgabe** (10 Punkte)

Sei $f$ analytisch im Gebiet $G \subseteq \mathbb{C}$ und sei $\gamma$ eine geschlossenen Kurve die mitsamt ihrem Inneren ganz in $G$ liegt. Man zeige: Wenn $|f|$ auf $\gamma$ konstant ist, so ist entweder $f$ konstant oder $f$ hat eine Nullstelle im Inneren von $\gamma$.

**H 7. Aufgabe** (10 Punkte)

Zeigen Sie:
Seien $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k(z-c)^k$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $> r$ und $M(r) := \max_{|z-c|=r} |f(z)|$. Wenn es ein $m \in \mathbb{N}$ mit $|a_m|r^m = M(r)$ gibt, so gilt bereits $f(z) = a_m(z-c)^m$.

**H 8. Aufgabe** (10 Punkte)

Man beweise die folgende Verschärfung des Schwarzschen Lemmas:
Ist $f$ analytisch in $\mathbb{D} := \{z \ : \ |z| < 1\}$ und erfüllt $|f(z)| \leq 1$ für $|z| < 1$ und $f^{(k)}(0) = 0$ für $k = 1, ..., N-1$, so gilt $|f(z)| \leq |z|^N$ für alle $z \in \mathbb{D}$ und $|f^{(n)}(0)| \leq N!$.
Gibt es einen Punkt $z \neq 0 \in \mathbb{D}$ mit $f(z) = z^N$ oder gilt $|f^{(n)}(0)| = N!$, so ist $f(z) = cz^n$ mit $|c| = 1$.

Gesamtpunktzahl: 40

Der **Test** zum Semesterende wird
am **Dienstag** dem **15.7.03** um **8.30 Uhr**
im Raum **MA 042** stattfinden.