Reinhard Nabben,
Sommersemester 2005

Einführung in die Numerische Mathematik

5. Übung

Aufgabe 1: Zeige, daß

$$\frac{(b-x)^2}{(b-a)^2}\left[f_1\frac{2x+b-3a}{b-a}+s_1(x-a)\right]+\frac{(a-x)^2}{(a-b)^2}\left[f_2\frac{2x+a-3b}{a-b}+s_2(x-b)\right]$$

das eindeutige Polynom dritten Grades ist, welches für $a < b$ und vorgegebene Werte $f_1, s_1, f_2, s_2 \in \mathbb{R}$ die Interpolationsaufgabe

$$p(a) = f_1, p'(a) = s_1, p(b) = f_2, p'(b) = s_2$$

erfüllt ('Hermite–Interpolierende').

(3 Punkte)

Aufgabe 2: Gegeben seien die Wertepaare

k	0	1	2
x_k	-2	0	1
f_k	10	-12	-2

a) Bestimmen Sie die Newton–Darstellung des Interpolationspolynoms

b) Bestimmen Sie den linear interpolierenden Spline

c) Werten Sie beide Interpolationsarten an der Stelle $x = -1$ aus und vergleichen Sie.

(4 Punkte)

Aufgabe 3: Gegeben sei die Funktion $f(t) = 1 - (t-1)^4$.

a) Bestimmen Sie den Fehler zwischen $f(t)$ und dem Interpolationspolynom p vom Grade 2 im Intervall $[0, 2]$ zu den Stützstellen

k	0	1	2
t_k	0	1	2
f_k	0	1	0

mit Hilfe der Fehlerabschätzung der Vorlesung.

b) Vergleichen Sie die Werte der Fehlerabschätzung mit den tatsächlichen Werten für $t = \frac{1}{2}$ und $t = 3$.

(7 Punkte)

Aufgabe 4: Berechne zu den Stützstellen $-2, -1, 0, 1, 2$ und den zugehörigen Funktionswerten $0, 0, 1, 0, 0$ (per Hand) die natürliche kubische Splineinterpolierende.

Hinweis: Zur Lösung des Gleichungssystems für die ersten Ableitungen nehme man zunächst an, dass die Ableitung an dem Punkt 0 gleich Null ist. Prüfe dann anschließend, ob diese Wahl gerechtfertigt war.

(6 Punkte)