Reinhard Nabben,
Sommersemester 2003

Einführung in die Numerische Mathematik

7. Übung

Aufgabe 1: a) Entwickle zur näherungsweisen Berechnung von

$$\int_c^d \int_a^b f(x,y)\;dx\;dy$$

eine Kubaturformel, die auf zweimaliger Anwendung der Simpsonregel beruht.

b) Wie sieht bei Unterteilung von $[a,b]$ und $[c,d]$ in jeweils 2 Intervalle (also $[a,\ \frac{a+b}{2}]$ und $[\frac{a+b}{2},\ b]$ bzw. $[c,\ \frac{c+d}{2}]$ und $[\frac{c+d}{2},\ d]$) die entsprechende zusammengesetzte Formel aus?

c) Gib eine Fehlerabschätzung für die Kubaturformel aus Teil a) an. Dabei sei f als hinreichend oft stetig differenzierbar voraussgesetzt. Berechne mittels der Fehlerabschätzung

$$\int_1^3 \int_0^1 (xy-1)^3\;dx\;dy.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 2: a) Zeige, dass die Werte $T_{n,1}$ des Extrapolationsverfahrens mit der Romberg-folge gerade die summierte Simpsonregel zur Schrittweite $h_{n-1} = \frac{b-a}{2^{n-1}}$ ist.

b) Berechne $T_{1,1}$ für $h_1 = \frac{h_0}{3}, h_0 = h = b-a$ und vergleiche mit der Newton-Cotes Formel für $n = 3$.

(8 Punkte)

Aufgabe 3P: Verwende zur Berechnung des Integrals

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin x \; dx$$

a) die summierte Trapezregel für $n = 1, 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^9$ und folgende Unterteilung:

$$x_i = i \cdot h, \; i = 0, 1, \ldots, n, \quad h = \frac{\pi}{2n}.$$

b) die summierte Simpsonregel für $n = 2, 4, 8, 16, \ldots, 2^9$ und der Unterteilung aus a).

Vergleiche die Verfahren bezüglich Genauigkeit und Rechenaufwand.

Aufgabe 4: Es sei $f \in C^1[a, b]$ und f' monoton wachsend auf $[a, b]$. Zeige, dass zu jeder Zerlegung

$$a = x_0 < x_1 < \ldots < x_n = b$$

von $[a, b]$ die mit der summierten Trapezregel gewonnene Approximation und die mit der summierten Mittelpunktsregel

$$M(f) := \sum_{j=1}^{n} f(0.5(x_j + x_{j-1}))(x_j - x_{j-1})$$

gewonnene Näherung für

$$\int_a^b f(x)dx$$

den Wert des Integrals einschliessen.

(8 Punkte)