Reinhard Nabben,
Sommersemester 2005

Einführung in die Numerische Mathematik

10. Übung

Aufgabe 1: Betimme die Cholesky-Zerlegung von

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 3 \\ 1 & 3 & 6 & 6 \\ 1 & 3 & 6 & 10 \end{bmatrix}.$$

(4 Punkte)

Aufgabe 2: Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & & 0 \\ -1 & \ddots & \ddots & \\ & \ddots & \ddots & -1 \\ 0 & & -1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\mathrm{n,n}}.$$

1. Berechne die LR Zerlegung der Matrix A.
2. Gebe die Cholesky-Zerlegung der Matrix A an.
3. Welche Beziehung besteht zwischen den Faktoren aus der LR–Zerlegung und denen der Cholesky–Zerlegung?

(6 Punkte)

Aufgabe 3: a) Zeige: $\|A\| = n \max_{i,j} |a_{ij}|$ für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist eine submultiplikative Matrixnorm. Sie ist mit den Vektornormen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$ und $\|\cdot\|_\infty$ auf $\mathbb{R}^n$ verträglich, aber keine lub–Norm.

b) Zeige: Ist A nichtsingulär, $\|\cdot\|$ eine Vektornorm, so ist

$$\min_{\|y\|=1} \|Ay\| = (lub\ (A^{-1}))^{-1}.$$

(6 Punkte)

Aufgabe 4P: Verwende das Cholesky–Verfahren zur Lösung des folgenden Gleichungssystems (Hilbertmatrix):

$$Hx = b,\ H = \left(\frac{1}{i+j-1}\right)_{i,j=1,\ldots,n},\ b = \left(\sum_{j=1}^{n} \frac{1}{i+j-1}\right)_{i=1,\ldots,n}.$$

Vergleiche die Lösung des Algorithmus mit der exakten Lösung $x = (1,\ldots,1)^T$ für $n = 2, 3, 4, \ldots, 30$. Was stellst Du fest? Erklärung!