Lösungen - Analysis I - Juli-Klausur 2007

Aufgabe 1

Induktionsanfang $n = 1$: $n^n = 1$, $n! = 1$ $\Rightarrow$ Behauptung gilt für $n = 1$.
Induktionsvoraussetzung: es gelte für ein $n \geq 1$ $n! \leq n^n$
Induktionsbeweis:

$$\begin{aligned}
(n+1)! &= (n+1)n! && \text{Definition der Fakultät}\\
&\leq (n+1)n^n && \text{Induktionsvoraussetzung, alles} > 0\\
&\leq (n+1)(n+1)^n && n < n+1,\\
& && x \mapsto x^n \text{ monoton wachsend für } x \geq 0\\
&= (n+1)^{n+1} && \text{Potenzgesetz}
\end{aligned}$$

Wer falsch herum beweist $(n+1)! \leq (n+1)^{n+1} \Rightarrow \ldots \Rightarrow \ldots$ ohne $\Leftrightarrow$ -Pfeile, bekommt maximal 2 Punkte.

Aufgabe 2

(i) (a) Es gilt $a_n = 0$ $\forall n$, also ist $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

(b) Es ist $n^2 \leq 2^n$ für $n \geq 5$ (muss nicht bewiesen werden, siehe Übungsblatt 2). Dann gilt $\sqrt[n]{2^n} \leq a_n \leq \sqrt[n]{2^n + 2^n}$ für $n \geq 5$.
Die linke und die rechte Seite der Ungleichung streben gegen 2, also ist hier $\lim_{n\to\infty} a_n = 2$.

(ii) Es gilt erst einmal $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$. Sei $\epsilon > 0$.

$$|a_n| = \frac{1}{n^2} \leq \epsilon \Leftrightarrow n \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}.$$

Nach dem Archimedischen Prinzip gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $N \geq \frac{1}{\sqrt{\epsilon}}$, dass damit das gesuchte $N(\epsilon)$ ist.

(iii) Die Aussage ist falsch. Gegenbeispiel: $a_n = (-1)^n$, $b_n = -(-1)^n$. Beide Folgen sind divergent, aber $a_n + b_n = 0$, damit ist $(a_n + b_n)$ konvergent.

Aufgabe 3

(i) Eine Menge $D \subset \mathbb{R}$ ist offen $\Leftrightarrow$
für alle $x_0 \in D$ existiert $\epsilon > 0$, so dass $\{x \in \mathbb{R} : |x - x_0| < \epsilon\} \subset D$.
Sei $x_0 \in \mathbb{R}$, $\epsilon = 1$. Dann ist natürlich $\{x : |x - x_0| < 1\} =]x_0 - 1, x_0 + 1[\subset \mathbb{R}$. Also ist $\mathbb{R}$ offen.

(ii) (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1} = \lim\limits_{x\to 1} x + 1 = 2$ (Kürzen, geht auch mit l'H).

(b) Grenzwert existiert nicht. Zähler bleibt beschränkt, Nenner wird immer kleiner $\Rightarrow$ Bruch wird immer größer.
Achtung: l'H nicht anwendbar!

(c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{|x|^2}{|x|} = \lim\limits_{x\to 0} |x| = 0$
(Geht auch mit l'H, dort muss aber der links/rechtsseitige GW separat berechnet werden)

(iii) Nein, es gibt so ein a nicht. Der linksseitige GW ist $\lim_{x\nearrow 0} f(x) = 0$, aber der rechtsseitige GW existiert nicht, $\lim_{x\searrow 0} f(x) = \infty$.

Aufgabe 4

Die Funktion ist auf $]0,+\infty[$ definiert und differenzierbar : nach Definition der Potenz ist $f(x) = x^{\ln x} = e^{\ln x \ln x} = e^{(\ln x)^2}$. Der Logarithmus ist auf $]0,+\infty[$ differenzierbar, die Exponentialfunktion auf ganz $\mathbb{R}$.

Die Ableitung ist $f'(x) = e^{(\ln x)^2} 2 \ln x \frac{1}{x} = \frac{2}{x} \ln x \cdot x^{\ln x}$.

Aufgabe 5

(i) (a) Substitution: $t = x^2$, $x = \sqrt{t}$, $\frac{dt}{dx} = 2x$, $dx = dt/2x$. Das geht, da $x \mapsto x^2$ bijektiv auf $[0,1]$ ist.

$$\int_0^1 x e^{-x^2}\, dx = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-t}\, dt = \frac{1}{2} \left[-e^{-t}\right]_0^1 = \frac{1}{2} - \frac{1}{2e}$$

(b) Additionstheorem nutzen

$$\int 2 \sin x \cos x \, dx = \int \sin(2x)\, dx = -\frac{1}{2} \cos(2x) + c$$

Alternativ geht auch eine Substitution $t = \cos x$ oder $t = \sin x$.

(ii) $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx$ (unbeschränkter Integrand)

$$\int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = [2\sqrt{x}]_a^1 = 2 - 2\sqrt{a}$$

$\Rightarrow \lim_{a \to 0} \int_a^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = \lim_{a \to 0} (2 - 2\sqrt{a}) = 2$, damit existiert das uneigentliche Integral, und es ist $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{x}}\, dx = 2$.

Aufgabe 6

(a) Quotientenkriterium: $\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^2} \frac{n^2}{n!} = \frac{n^2}{n+1}$, das geht gegen $+\infty$ für $n \to \infty$ $\Rightarrow$ die Reihe ist divergent.

(b) Vergleichskriterium: $0 \leq \frac{n}{n^3+1} \leq \frac{n}{n^3} = \frac{1}{n^2}$. Die Reihe $\sum \frac{1}{n^2}$ ist konvergent, also ist auch die Reihe $\sum \frac{n}{n^3+1}$ konvergent.
Wurzel- und Quotientenkriterium bringen hier nix.

(c) Wurzelkriterium: $\sqrt[n]{\frac{(n^n)^2}{n^{(n^2)}}} = \sqrt[n]{n^{2n-n^2}} = n^{2-n} \to 0$ für $n \to \infty$ $\Rightarrow$ Konvergenz.

(d) Die Reihe ist divergent. Wäre sie konvergent, dann wäre wegen der Konvergenz von $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ auch $\sum \frac{1+(-1)^n}{n} - \frac{(-1)^n}{n} = \sum \frac{1}{n}$ konvergent. Widerspruch.