Technische Universität Berlin
Fakultät II – Institut für Mathematik
Prof. Dr. Tröltzsch

SS 07
09. Oktober 2007

Oktober – Klausur
Analysis I

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Keine Hilfsmittel (Handy, Taschenrechner, etc.) zugelassen.

Die Lösungen sind in **Reinschrift** auf A4 Blättern abzugeben. Für jede Aufgabe ist ein neues Blatt zu verwenden. Auf jedes Blatt Name und Matrikelnummer schreiben! Mit Bleistift geschriebene Klausuren können **nicht** gewertet werden.

Geben Sie immer den **vollständigen Rechenweg** an bzw. **begründen** Sie ihre Antworten.

Die Bearbeitungszeit beträgt **90 Minuten**.

Tip: Beginnen Sie mit den Aufgaben(teilen), die Ihnen am leichtesten fallen. Die Aufgaben sind nach Themengebieten geordnet.

Die Klausur ist mit 15 von 30 Punkten bestanden.

Korrektur

1	2	3	4	5	6	Σ

1. Aufgabe

5 Punkte (1+2+2)

(i) Definieren Sie den Begriff 'injektiv' für eine Abbildung $f : X \to Y$.

(ii) Gegeben ist die Abbildung $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f(x) = x^2$.
Zeigen Sie, dass f injektiv ist!

(iii) Berechnen Sie $f^{-1}(f(4))$, $f(f^{-1}(\{4\}))$, $f^{-1}(f(5))$ sowie $f(f^{-1}(\{5\}))$.

2. Aufgabe

5 Punkte (3+2)

(i) Untersuchen Sie die folgenden Folgen (a_n) auf Konvergenz, und berechnen Sie bei Konvergenz den Grenzwert.

a) $a_n = \frac{n^4-n+2}{n^{12}-n^7+9}$ b) $b_n = \left(1 - \frac{1}{n^2}\right)^n$ c) $c_n = n\cos(n\pi)$

(ii) Gegeben sind zwei reelle Folgen (a_n) und (b_n). Beweisen oder Widerlegen Sie:
Ist (a_n) konvergent und (b_n) divergent, dann ist auch $(a_n + b_n)$ divergent.

3. Aufgabe

7 Punkte (2+3+2)

(i) Beweisen Sie mithilfe der Definition ($\epsilon - \delta$), dass die Funktion f, $f(x) = \frac{1}{x}$, stetig auf $[1, \infty)$ ist.

(ii) Existieren die folgenden Grenzwerte? Wenn ja, berechnen Sie diese.

a) $\lim\limits_{x \to \pi} \dfrac{\sin x}{x^2}$ b) $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 5x + 6}$ c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{e^x - 1}{|x|}$

(iii) Zeigen Sie, dass die Gleichung $\sqrt{\sin^2 x + x^2} = 1$ mindestens <u>zwei</u> Lösungen in dem Intervall $[-\pi, \pi]$ hat.

4. Aufgabe

5 Punkte (2+3)

(i) Bestimmen Sie das Taylorpolynom 2. Grades der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = \sin(x^2)$ im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

(ii) Zeigen Sie, dass der Fehler im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ kleiner als $\frac{1}{6}$ bleibt.

5. Aufgabe

4 Punkte

Berechnen Sie die folgenden Integrale.

a) $\displaystyle\int_0^2 [x]\, dx$ b) $\displaystyle\int 2x\, e^{-x^2}\, dx$ c) $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{x(x+1)}\, dx$ d) $\displaystyle\int_{-1}^1 \sqrt{|x|}\, dx$

6. Aufgabe

4 Punkte

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert die Potenzreihe $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}(x-2)^n$, für welche x ist diese Reihe divergent?