SS 2007
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Dr. Daniel Wachsmuth

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

4. Übungsblatt Analysis I

Hausaufgaben: Erfolgt die Abgabe nicht in Zweiergruppen, gibt es Punktabzüge (mindestens 50%)! Abgabe spätestens am 15.5.07 um 10:15 in der großen Übung.

Übungsaufgaben: [werden in der Übung am 08.5.07 besprochen]

1. Die folgenden Mengen sind gleichmächtig: (a) $\mathbb{N}$ und $\mathbb{Q}$, (b) $]-\infty,+\infty[$ und $]0,1[$.

2. Auf dem Mars steht ein Hotel mit unendlich vielen durchnumerierten Zimmern, welches voll belegt ist. (Der Einfachheit halber nehmen wir an, daß nur Einzelzimmer vorhanden sind.)
   (a) Es kommen noch zwei Herren, die ebenfalls in diesem Hotel wohnen möchten. Ist dies möglich?
   (b) 1100 Gäste reisen ab. Wie ist die Belegung des Hotels?
   (c) Abzählbar unendlich viele Gäste reisen an. Können diese noch untergebracht werden? Wenn ja, wie?
   (d) Derartige Hotels stehen auf allen Planeten. Aufgrund einer Havarie im Kosmos müssen (abzählbar) unendlich viele geschlossen werden. Kann unser Hotel den dadurch entstehenden Bedarf decken?
   (e) Der Hotelchef wird vom gastronomischen Zentrum gebeten, alle möglichen Zimmerbelegungen (nicht namentlich - sondern nur belegt/nicht belegt) aufzuschreiben. Er schreibt unendlich viele durchnumerierte Varianten auf. Warum ist das gastronomische Zentrum dennoch nicht zufrieden?

3. Wir beweisen den sogenannten **Dreifolgensatz** (auch Sandwichprinzip): Sind $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reelle Zahlenfolgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n = a$ und $a_n \le c_n \le b_n$. Dann gilt auch $\lim_{n\to\infty} c_n = a$.

   Beweisen Sie damit: $\lim_{n\to\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}) = 0$ und $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 09.5.07 bis 11.5.07 besprochen]

1. Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz, und geben Sie im Konvergenzfall ein $N(\epsilon)$ an!

   (a) $a_n = \frac{n}{n^2+1}$, (b) $a_n = \frac{1}{\sqrt{n}}$, (c) $a_n = \frac{n^2+n+1}{n^2+5n+3}$, (d) $a_n = 3 + \frac{(-1)^n}{n^2}$, (e) $a_n = \frac{n^3+n+1}{n^2+n+1}$.

   Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz, und geben Sie im Konvergenzfall den Grenzwert an.

   (f) $a_n = \sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$, (g) $a_n = (-1)^n\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,
   (h) $a_n = \sqrt[n]{c}$ mit $(c>0)$, (i) $a_n = \sqrt[n]{2^n+3^n}$

2. Es seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass dann $(a_nb_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ebenfalls eine Nullfolge ist. Zeigen Sie durch ein Beispiel, dass auf die Beschränktheit von $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nicht verzichtet werden kann.

Hausaufgaben: [abgeben am 15.5.07 10:15]

1. (3 Punkte)
   Es ist eine Zahlenfolge reeller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegeben mit der folgenden Eigenschaft: Es gibt eine Zahl $a \in \mathbb{R}$, so dass jede *echte* Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ gegen a konvergiert. Zeigen Sie, dass dann gilt $\lim_{n\to\infty} a_n = a$.

   Eine Teilfolge $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ heißt echte Teilfolge, wenn beide Teilfolgen nicht ab einem bestimmten Index übereinstimmen. Es müssen in $(a_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ also (abzählbar) unendlich viele Glieder von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ fehlen.

2. (4 Punkte)

Untersuchen Sie die nachstehenden Folgen auf Konvergenz. Berechnen Sie im Konvergenzfall den Grenzwert.

(a) $f_n = \sqrt[n]{a_1^n + \cdots + a_m^n} \quad (a_i \geq 0 \ \forall i = 1 \ldots m)$,

(b) $f_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n - \sqrt{n}}$,

(c) $f_n = \frac{\sum_{i=0}^{k} a_i n^i}{\sum_{i=0}^{j} b_i n^i}$ $(j, k \in \mathbb{N},\ a_k \neq 0,\ b_j \neq 0)$,

(d) $f_n = \frac{1+2+\cdots+n}{n+2} - \frac{n}{2}$.

3. Gegeben Sei die folgende rekursiv definierte Zahlenfolge mit $c \in \mathbb{R}$, $c > 0$: (4 Punkte)

$$x_0 := \sqrt{c},\ x_{n+1} := \sqrt{c + x_n}.$$

Zeigen Sie, dass diese Folge konvergiert, und berechnen Sie den Grenzwert.

Hinweis: Zeigen Sie (z.B. per Induktion), dass die Folge monoton und beschränkt ist.