SS 2007
Prof. Dr. Fredi Tröltzsch
Dr. Daniel Wachsmuth

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

9. Übungsblatt Analysis I

Hausaufgaben: Abgabe spätestens am 19.6.07 um 10:15 in der großen Übung.

Klausur: Die Klausur findet am 18.7. um 12:00 im Hörsaal ER270 statt.

Tutoriumsaufgaben: [werden in den Tutorien vom 13.6.07 bis 15.6.07 besprochen]

1. Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte: :
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{a^x - b^x}{x}$ b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)^4 - 4x + x^2 - \frac{4}{3}x^3 + x^4}{x^3 + 6\sin x - 6x}$ c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^{\alpha x} - \cos\alpha x}{e^{\beta x} - \cos\beta x}$

   d) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{x^2 \sin(\frac{1}{x})}{\sin x}$ e) $\lim\limits_{x\to 0}(x^{x^x} - 1)$ f) $\lim\limits_{x\searrow 0} \ln(1+x)^{\frac{k}{1+\ln x}}$

   g) $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{\ln\sin(2x)}{\ln\sin x}$ h) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{(1+x)^{1/x} - e}{x}$ i) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{e^x + \sin x}{e^x - \sin x}$

2. Gegeben ist die Funktion f mit $f(x) = |x|^\alpha$, $\alpha > 0$. Wie oft (in Abhängigkeit von $\alpha \in \mathbb{R}$) ist f im Nullpunkt differenzierbar? Ist f konvex?

3. Berechnen Sie die n-te Ableitung der Funktion $f(x) = \ln x$.

Hausaufgaben: [abgeben am 19.6.07 10:15]

1. Es sei $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig, $x_0 \in]a,b[$. Weiterhin sei f differenzierbar auf $[a,b] \setminus \{x_0\}$, und es existiere $\lim\limits_{x\to x_0} f'(x) = g$.

   Zeigen Sie: f ist auch in x_0 differenzierbar mit der Ableitung $f'(x_0) = g$. (2 Punkte)

2. Die Funktion $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ sei in $]a,b[$ zweimal stetig differenzierbar. Zeigen Sie, dass für alle $x \in]a,b[$ gilt $\lim\limits_{h\to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} = f''(x)$. (3 Punkte)

3. Berechnen Sie folgende Grenzwerte: (4 Punkte)
   a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x(\cos x - 1)}$ b) $\lim\limits_{x\to 1} \frac{x^n - nx + n - 1}{(x-1)^2}$

   c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x + \sin x}{x + 1}$ d) $\lim\limits_{x\to +\infty} x^2 \sin x$.

4. Siehe Beispiel 176 der Vorlesung: (6 Punkte)

   (a) Zeigen Sie per vollständiger Induktion (nach k), dass $\lim\limits_{x\to +\infty} \frac{x^k}{e^x} = 0$.

   (b) Folgern Sie daraus, dass $\lim\limits_{x\searrow 0} \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x^k} = 0$.

   (c) Beweisen Sie (wiederum per Induktion), dass die k-te Ableitung der Funktion f definiert durch $f(x) = e^{-\frac{1}{x}}$ für $x > 0$ die Form hat $f^{(k)}(x) = p_k\left(\frac{1}{x}\right) e^{-\frac{1}{x}}$. Dabei ist p_k ein Polynom.