TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik 16.7.2007
Prof. Dr. Ferus

Analysis II–Klausur

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Geben Sie bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an.
Die Klausur ist mit 13 Punkten bestanden. Sie haben 110 Minuten Zeit.
Die Aufgaben sind *nicht* nach Schwierigkeit sortiert, sondern nach Themenbereichen.
Bearbeiten Sie erst die Aufgaben(teile), die Ihnen am leichtesten fallen. Wenn Sie an einer Stelle festhängen sollten, bearbeiten Sie eine andere Aufgabe und kommen später wieder zur Aufgabe zurück.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

1. Aufgabe (5 Punkte)

Der metrische Raum (X, d) ist gegeben. Zeigen Sie, dass auch

$$d^*(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$$

eine Metrik auf X ist.

2. Aufgabe (6 Punkte)

a) Seien $A_1, \ldots, A_n$ kompakte Teilmengen eines metrischen Raumes (X, d).
Zeigen Sie, dass die Menge
$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k$$
kompakt ist.

b) Beweisen Sie mit dem Satz von Bolzano–Weierstraß, dass jeder kompakte metrische Raum (X, d) vollständig ist.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to]0, \infty[$ stetig mit $f(x) \leq 1/\|x\|$ für alle $x \neq 0$. Zeigen Sie, dass f auf $\mathbb{R}^n$ ein globales Maximum annimmt.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := \begin{cases} \frac{\sin(x_1)\sin(x_2)}{x_1^2+x_2^2} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ auf:

a) Stetigkeit,

b) partielle Differenzierbarkeit,

c) Differenzierbarkeit.

5. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $D = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid xy \leq 0 \}$ und $f \colon D \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) = \cos x + y(y + 2).$$

a) Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema von $f \colon D \to \mathbb{R}$.

b) Bezeichne (x_0, y_0) einen der kritischen Punkte. Bestimmen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f um den Entwicklungspunkt (x_0, y_0).

6. Aufgabe (5 Punkte)

a) Zeigen Sie, dass sich die Gleichung $x+y+z = \sin(xyz)$ in einer Umgebung V von $(0, 0, 0) \in \mathbb{R}^3$ eindeutig nach z auflösen lässt, d.h. auf einer geeigneten Umgebung U von $(0, 0)$ existiert eine Funktion u mit der Eigenschaft, dass

$$\{(x, y, u(x, y)|(x, y) \in U\}$$

die Lösungsmenge obiger Gleichung in V darstellt.

b) Berechnen Sie die partiellen Ableitungen von u an der Stelle $(0, 0)$.

Gesamtpunktzahl: 31