TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik 16.10.2007
Prof. Dr. Ferus

Analysis II–Klausur

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Geben Sie bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an.
Die Klausur ist mit 8 Punkten bestanden. Sie haben 110 Minuten Zeit.
Die Aufgaben sind *nicht* nach Schwierigkeit sortiert, sondern nach Themenbereichen.
Bearbeiten Sie erst die Aufgaben(teile), die Ihnen am leichtesten fallen. Wenn Sie an einer Stelle festhängen sollten, bearbeiten Sie eine andere Aufgabe und kommen später wieder zur Aufgabe zurück.

1	2	3	4	5	6	$\sum$

1. Aufgabe (3 Punkte)

Untersuchen Sie, welche Metrikeigenschaften

$$d(x, y) = |x^2 - y^2|, \quad x, y \in \mathbb{R}$$

erfüllt.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum und seien $f_n, f : X \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ stetige Funktionen mit:

(i) $f_{n+1}(x) \leq f_n(x)$ für alle $n \in \mathbb{N}, x \in X$,

(ii) $f_n \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ punktweise auf X.

Zeigen Sie:

a) Für $\epsilon > 0$ ist die Familie $(U_n)_{n=1}^{\infty}$ definiert mittels der Funktionen f_n, f durch

$$U_n := \{x \in X : f_n(x) - f(x) < \epsilon\} \qquad n \in \mathbb{N}$$

eine offene Überdeckung von X.

b) $f_n \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} f$ gleichmäßig auf X. (Hierbei können Sie das Resultat von a) auch nutzen ohne es bewiesen zu haben)

3. Aufgabe (3 Punkte)

Untersuchen Sie die Funktion $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$h(x) := \begin{cases} \frac{x_1 x_2}{x_1^2 + x_2^2} & x \neq 0, \\ 0 & x = 0, \end{cases}$$

im Punkt $0 \in \mathbb{R}^2$ auf:

a) Stetigkeit,

b) partielle Differenzierbarkeit,

c) Differenzierbarkeit.

4. Aufgabe (3 Punkte)

Kann es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ geben, für die

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\tan x}{y}\right)^2 + y + \frac{1}{y^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2\tan x}{y^3} + x$$

gilt? Bestimmen Sie gegebenenfalls ein solches f.

5. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, (x,y) \mapsto (ay, bx)$ gegeben, mit $a, b \neq 0$. Bestimmen Sie die Punkte $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in denen f lokal eine differenzierbare Inverse besitzt. Geben Sie die Jacobi-Matrix der inversen Funktion an der Stelle $f(x,y)$ an.

6. Aufgabe (3 Punkte)

Auf der dreidimensionalen Sphäre S^3 in $\mathbb{R}^4$ bestimme man die Extremstellen und Extremwerte der Funktion $f(x) = x_1x_4 - x_2x_3$.

Gesamtpunktzahl: 19