1. Übung Analysis II
(Metrische Räume, Topologie)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe
Zeigen Sie, dass die diskrete Metrik eine Metrik ist. Sind Teilmengen von X bzgl. dieser Metrik offen und/oder abgeschlossen ?

2. Aufgabe
Skizzieren Sie die Einheitskugel in $\mathbb{R}^2$ zu verschiedenen Metriken d^p, $p \geq 1$.
Was passiert im Fall $p = 1/2$?

3. Aufgabe
Sei X, d ein metrischer Raum. Seien $x \in X, \epsilon > 0$.
Zeigen Sie, dass dann $U_\epsilon(x)$ offen ist.

4. Aufgabe
Sei X, d ein metrischer Raum, $Y \subset X$.

a) Zeige: $A = \overset{\circ}{Y} \Leftrightarrow A \subset X, A$ offen, $A \subset Y$,
$\forall U \subset X$ offen mit $U \subset Y$ gilt $U \subset A$

b) Zeige: $B = \overline{Y} \Leftrightarrow B \subset X, B$ abgeschlossen, $B \supset Y$,
$\forall V \subset X$ abgeschlossen mit $Y \subset V$ gilt $B \subset V$

Übungsaufgaben

1. Aufgabe
Seien $a, b \in \mathbb{R}$ mit $a < b$. Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

a) Auf $C^0([a, b])$ definiert $d^1(f, g) := \int_a^b |f(x) - g(x)| dx$ eine Metrik.

b) Die offenen Mengen von $(C^0([a, b]), d^1)$ sind auch in $(C^0([a, b]), d^{\sup})$ offen.

c) Zu jedem $\varepsilon > 0$ und jedem $k > 0$ gibt es eine Funktion $g \in C^0([a, b])$ mit $d^{\sup}(0, g) > k$ und $d^1(0, g) < \varepsilon$. Insbesondere gilt die Umkehrung von b) nicht.

2. Aufgabe

Sei $(X_i, d_i)_{i\in\mathbb{N}}$ eine Folge von metrischen Räumen. Sei $X = \prod_{i=0}^{\infty} X_i$ mit Punkten $x = (x_0, x_1, x_2, x_3, \dots) \in X$. Zeigen Sie, dass dann

$$d\colon X \times X \to \mathbb{R}, \qquad d(x,y) := \sum_{i=0}^{\infty} \frac{1}{2^i} \frac{d_i(x_i,y_i)}{1 + d_i(x_i,y_i)}$$

eine Metrik auf X definiert.

Sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Sei $U_i = X_i$ für alle $i \neq k$ und $U_k \subset X_k$ eine offene Menge in (X_k, d_k). Zeigen Sie, dass die Menge $U = \prod_{i=0}^{\infty} U_i$ eine offene Menge in (X, d) ist.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (5 Punkte)

Sei X eine Menge und $d : X \times X \to \mathbb{R}$ eine Abbildung.
Zeigen Sie: d ist genau dann eine Metrik auf X, wenn für alle $x, y, z \in X$

a) $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$

b) $d(x,z) \leq d(x,y) + d(z,y)$

gelten.

2. Aufgabe (5 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definieren eine Metrik auf der Menge X? Beweisen Sie Ihre Antwort.

a) $X = \mathbb{R}$, $d(x,y) := \mathrm{e}^{x-y} - 1$

b) $X = \mathbb{N}$, $d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y} & \text{falls } x \neq y \end{cases}$

c) $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $d(x,y) := |S(x) - S(y)|$ mit
$$S : X \to \mathbb{R},\ S(x) := \begin{cases} -1 & \text{falls } x = -\infty, \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{falls } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{falls } x = +\infty \end{cases}$$

d) $X = \mathbb{R}^2$, $d(x,y) = \sin(d^2(x,y))$, wobei d^2 die Standardmetrik auf dem $\mathbb{R}^2$ bezeichnet

e) $X = C^0([0,1])$, $d(f,g) := |f(0) - g(0)|$

3. Aufgabe

(5 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind offen, welche sind abgeschlossen? Beschreiben Sie diese Mengen möglichst einfach in Worten und begründen Sie Ihre Entscheidung. Skizzieren Sie sie von Hand für $n = 3$.

a) $A = \{x \in \mathbb{R}^n : d^1(x, 0) = 1\}$

b) $B = \{x \in \mathbb{R}^n : d^2(x, 0) \leq 1\}$

c) $C = \{x \in \mathbb{R}^n : d^\infty(x, 0) < 1\}$

d) $D = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 x_2 x_3 \leq 0, x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 > 1\}$

e) $E = \{x \in \mathbb{R}^n : a \cdot x > 2\}$ mit $a \in \mathbb{R}^n$

4. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei X die Menge der Berliner U–Bahnstationen und $d(x, y)$ für x, $y \in X$ die Länge der kürzesten Schienenverbindung zwischen x und y.

Zeigen Sie, dass (X, d) ein metrischer Raum ist. Ist dieser Raum beschränkt? Bestimmen Sie die offenen und abgeschlossenen Teilmengen von (X, d).

Gesamtpunktzahl: 20