TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik Abgabe: 7. Mai 2007 (vor der Großübung)
Ferus / Garcke `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/Analysis2`

2. Übung Analysis II

(Metrische Räume, Topologie, Konvergenz)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Betrachten Sie die Menge der ganzen Zahlen $\mathbb{Z}$ und das Teilmengensystem

$$\mathcal{T} = \{A \subseteq \mathbb{Z} \mid \forall a \in A\, \exists b \in \mathbb{Z}, \text{ so dass } a + b\mathbb{Z} \subseteq A \text{ ist}\}.$$

Zeigen Sie, dass $\mathcal{T}$ eine Topologie auf $\mathbb{Z}$ ist.

2. Aufgabe

Untersuchen Sie die Folge $f_n : [0,1] \to \mathbb{R}$, $f_n(x) = x^n$ auf Konvergenz bzgl. d^{sup} und d^1.

3. Aufgabe

Beweisen Sie den Banachschen Fixpunktsatz unter der Voraussetzung, dass nicht f, sondern $f^m = f \underbrace{\circ \ldots \circ}_{m-\text{mal}} f$ kontrahierend ist.

4. Aufgabe

Sei $X := \{A \subset \mathbb{R}^n \mid A \text{ ist abgeschlossen und beschränkt}\}$ und $d(x,y)$ die euklische Metrik d^2 auf dem $\mathbb{R}^n$.
Seien $A, B \in X$. Wir definieren

- $d(x, A) := \inf\{d(x,a) \mid a \in A\}, \quad x \in \mathbb{R}^n$
- $c_{AB} := \sup\{d(b, A) \mid b \in B\}$
- $d(A,B) := \max\{c_{AB}, c_{BA}\}$

Zeigen Sie, dass d eine Metrik auf X ist, die sogenannte *Hausdorffsche Metrik*.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen:

a) Sei $f_k \in C^0([a,b])$ eine gegen $f \in C^0([a,b])$ gleichmäßig konvergente Folge. Dann gilt

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k(x)dx.$$

Obige Behauptung gilt nicht, wenn $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ nur punktweise konvergiert.

b) Sei $f_k \in C^1[a,b]$ eine gegen $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ punktweise konvergente Folge, deren Ableitungen gleichmäßig konvergieren. Dann ist f stetig differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = \lim_{k\to\infty} f_k'(x).$$

2. Aufgabe

Geben Sie Beispiele für Folgen von offenen Teilmengen von $\mathbb{R}$ an, deren Durchschnitt abgeschlossen, offen bzw. weder offen noch abgeschlossen ist.

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass jede beschränkte offene Menge $O \subset \mathbb{R}^n$ die Vereinigung von abzählbar unendlich vielen abgeschlossenen Würfeln ist, die paarweise keine inneren Punkte gemeinsam haben.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Raum und $Y, Z \subset X$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen:

a) $Y = \mathring{Y} \Longleftrightarrow Y$ offen $\Longleftrightarrow \partial Y \cap Y = \emptyset$.

b) $Y = \overline{Y} \Longleftrightarrow Y$ abgeschlossen $\Longleftrightarrow \partial Y \subset Y$.

c) $\overline{Y \cup Z} = \overline{Y} \cup \overline{Z}$ und $\overline{Y \cap Z} \subset \overline{Y} \cap \overline{Z}$

Finden Sie außerdem ein Beispiel, wo $\overline{Y \cap Z} \neq \overline{Y} \cap \overline{Z}$ gilt.

d) $X \setminus \mathring{Y} = \overline{X \setminus Y}$ und $X \setminus \overline{Y} = (X \setminus Y)^0$

2. Aufgabe (3 Punkte)

Konstruieren Sie durch Angabe einer Menge X und eines Teilmengensystems $\mathcal{T}$ einen topologischen Raum $(X, \mathcal{T})$, der kein Hausdorff-Raum ist.
Es muss also möglich sein, in X zwei Punkte $x \neq y$ zu finden, so dass für jede Wahl offener Umgebungen $U(x)$ von x und $U(y)$ von y

$$U(x) \cap U(y) \neq 0$$

ist.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum. Seien $(x_n), (y_n)$ Cauchyfolgen in (X, d). Zeigen Sie, dass dann die Folge $(d(x_n, y_n))$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$ ist.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$. Zeigen Sie die folgenden Behauptungen.

a) d definiert eine Metrik auf $\mathbb{R}$.

b) Der metrische Raum $(\mathbb{R}, d)$ ist nicht vollständig.

c) Sei $U \subset \mathbb{R}$. Dann ist U genau dann offen in $(\mathbb{R}, d)$, wenn U offen in $(\mathbb{R}, d^1)$ ist.

   Damit stimmen die offenen Mengen von $(\mathbb{R}, d)$ mit denen von $(\mathbb{R}, d^1)$ überein.

Zusatzaufgabe (4 Zusatzpunkte)

Sei (M, d) ein vollständiger, nicht–leerer, beschränkter metrischer Raum. Weiter sei $f\colon M \to M$ eine kontrahierende Abbildung.
Zeigen Sie, dass dann der Durchschnitt der rekursiv definierten Mengenfolge: $M_0 = M$, $M_{k+1} = f(M_k)$ aus genau einem Punkt besteht. Geben Sie dabei eine Abschätzung für den Durchmesser von M_k an.

Gesamtpunktzahl: 20