TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik Abgabe: 21. Mai 2007 (vor der Großübung)
Ferus / Garcke `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/Analysis2`

4. Übung Analysis II

(kompakte Mengen, Zusammenhang, stetige Abbildung)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Sei (X, d_X) ein zusammenhängender metrischer Raum.

a) Sei Y eine Menge versehen mit der diskreten Metrik. Dann gilt: $f\colon X \to Y$ ist genau dann stetig, wenn f konstant ist.

b) Sei $f\colon X \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung ohne Nullstellen. Für ein $x_0 \in X$ gelte $f(x_0) > 0$. Dann gilt für alle $x \in X$: $f(x) > 0$.

2. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x,y) := \begin{cases} \frac{x^2+y^2}{\sqrt{1+x^2+y^2}-1} & \text{falls } (x,y) \neq (0,0), \\ 2 & \text{falls } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit bezüglich der euklidischen Metrik d^2.

3. Aufgabe

Sei $f : X \to Y$ eine stetige Abbildung zwischen metrischen Räumen. Für jede kompakte Teilmenge $K \subset X$ existiert ein $M > 0$, so dass $d_Y(f(x), f(y)) \leq M$ für alle x, $y \in K$.

4. Aufgabe

Seien X und Y metrische Räume. Eine Abbildung $f : X \to Y$ heißt *Lipschitz-stetig*, falls eine Konstante $L \geq 0$ existiert, so dass

$$d_Y(f(x), f(y)) \leq L\, d_X(x,y) \quad \text{für alle } x,\, y \in X.$$

Die Abbildung heißt *lokal Lipschitz-stetig*, falls jeder Punkt $x \in X$ eine Umgebung $U \subset X$ hat, auf der die Restriktion $f : U \to Y$ Lipschitz-stetig ist.
Zeigen Sie:
Ist K ein kompakter metrischer Raum und $f : K \to Y$ eine lokal Lipschitz-stetige Abbildung, dann ist f *Lipschitz-stetig* auf K.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

a) Die Oberfläche der Einheitskugel $S^n = \{\, x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid d^2(x,0) = 1 \,\}$ in $\mathbb{R}^{n+1}$ ist für alle $n \geq 1$ zusammenhängend und kompakt.

b) Sei $T\colon S^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann nimmt T Maximum und Minimum an und es gibt einen Punkt $x_0 \in S^2$ mit $T(x_0) = T(-x_0)$.

(Folgerung: Bei jeder stetigen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche gibt es einen wärmsten und einen kältesten Punkt, und zwei sich gegenüberliegende Punkte mit gleicher Temperatur.)

2. Aufgabe

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und bijektive Funktion. Dann ist f^{-1} auch stetig.

b) Es gibt stetige, bijektive Abbildungen zwischen metrischen Räumen, deren Umkehrung nicht stetig ist.

c) Sei $f\colon X \to Y$ eine stetige, bijektive Abbildung zwischen zwei metrischen Räumen. Sei X kompakt. Dann ist die Umkehrung f^{-1} von f stetig.

3. Aufgabe

Zeigen Sie, dass es eine stetige Abbildung von $[0,1]$ auf $[0,1]^2$ gibt, welche surjektiv ist.

4. Aufgabe **(Satz von Arzelà-Ascoli)**

Sei $A \subset C^0(S;\mathbb{R}^p)$ mit S kompakt. A heißt *gleichgradig stetig* falls $\forall x \in S\, \forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ so dass $\forall f \in A$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ für } y \in S \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Es gilt, dass $A \subset C^0(S;\mathbb{R}^p)$, mit S kompakt, genau dann kompakt ist, wenn A beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ist.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (9 Punkte)

a) Beweisen Sie, dass jede wegzusammenhängende Menge auch zusammenhängend ist.

b) Sei M die abgeschlossene Hülle von $\{ (x, \sin(\frac{1}{x})) \mid x \in]0, \infty[\}$ in $\mathbb{R}^2$. Skizzieren Sie die Menge M und beweisen Sie, dass M zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.

2. Aufgabe (3 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $a \in X$.
Zeigen Sie, dass die Abbildung $d(\cdot, a)\colon X \to \mathbb{R}$, $x \mapsto d(x, a)$ stetig ist.

3. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x, y) := \begin{cases} \frac{\sin(x^2+y^2)}{x^2+y^2} & \text{falls } (x, y) \neq (0, 0), \\ 1 & \text{falls } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Untersuchen Sie f auf Stetigkeit bezüglich der euklidischen Metrik d^2.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}^p$ eine stetige Abbildung. Weiterhin soll gelten, dass für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}^p$ die Menge $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt ist.
(Funktionen mit dieser Eigenschaft heißen *eigentlich*, auf englisch *proper*.)
Zeigen Sie, dass f eine *abgeschlossene Abbildung* ist, d.h. f bildet abgeschlossene Menge auf abgeschlossene Mengen ab.
Hinweis: Betrachten Sie dazu eine Folge $(x_k)_k \in A$ (mit A abgeschlossen), so dass $(f(x_k))_k$ gegen $b \in \mathbb{R}^p$ konvergiert. Zeigen Sie $b \in f(A)$.

Zusatzaufgabe **(Satz von Dini)** (5 Zusatzpunkte)

Sei (X, d) ein kompakter metrischer Raum. Weiter seien $f_k \in C^0(X; \mathbb{R})$ und es gelte $f_k(x) \searrow 0$ (monoton !) für $k \to \infty$ für alle $x \in X$. Dann konvergiert f_k gleichmäßig gegen 0 für $k \to \infty$.
Hinweis: Sonst gäbe es eine Teilfolge mit Punkten $x_k \in X$, so dass $f_k(x_k) \geq \epsilon > 0$.

Gesamtpunktzahl: 20