5. Übung Analysis II

(stetige Abbildungen, normierte Vektorräume)

Die Abgabe für dieses Aufgabenblatt ist wegen Pfingsten am Dienstag vor der Vorlesung.

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

a) Zeigen Sie, dass die Ableitung eine nicht stetige lineare Abbildung von $C^1([0,1])$ nach $C^0([0,1])$ ist, wenn man beide Vektorräume mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ versieht.

b) Verwendet man allerdings auf $C^1([0,1])$ die Norm $\|f\| = \|f\|_{\text{sup}} + \|f'\|_{\text{sup}}$, so wird die Ableitung eine stetige Abbildung von $C^1([0,1])$ nach $C^0([0,1])$.

c) Eine Konsequenz von b) ist, dass die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_{\text{sup}}$ auf $C^1([0,1])$ nicht äquivalent sind. Warum ist das kein Widerspruch zu dem in der Vorlesung bewiesenen Satz: Zwei Normen auf einem endlich dimensionalen Vektorraum sind äquivalent.

d) Ist $(C^0([0,1]), \|\cdot\|_{\text{sup}})$ ein Banachraum ?

2. Aufgabe

Seien V und W zwei normierte Vektorräume und V endlich dimensional. Sei $L(V,W)$ versehen mit der Operatornorm. Sei (A_n) eine Cauchy–Folge in $L(V,W)$, dann ist $(A_n(v))$ für alle $v \in V$ eine Cauchy–Folge.

3. Aufgabe

Betrachten Sie den Vektorraum $\mathbb{R}^n$ mit der 1-Norm $\|\cdot\|_1$, der Euklidschen Norm $\|\cdot\|_2$ und der Maximumnorm $\|\cdot\|_\infty$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^n$

$$\|x\|_\infty \le \|x\|_1 \le n\|x\|_\infty,$$
$$\|x\|_\infty \le \|x\|_2 \le \sqrt{n}\|x\|_\infty$$

gilt und dass die vier(!) auftretenden Konstanten optimal sind.

Übungsaufgaben

Nachtrag zur letzten Großübung

Benutzt wurde das

Cauchysche Kriterium für gleichmäßige Konvergenz

Notwendig und hinreichend dafür, dass eine Folge (f_k) von Abbildungen $f_k : D \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$ gleichmäßig konvergiert, ist die folgende Bedingung:
Zu jedem $\epsilon > 0$ gibt es ein k_0 derart, dass für alle $k, l \geq k_0$ gilt:

$$d^{\sup}(f_k, f_l) < \epsilon$$

1. Aufgabe (Satz von Arzelà-Ascoli)

Sei $A \subset C^0(S; \mathbb{R}^p)$ mit S kompakt. A heißt *gleichgradig stetig* falls $\forall x \in S \, \forall \epsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ so dass $\forall f \in A$ gilt

$$|f(x) - f(y)| < \epsilon \text{ für } y \in S \text{ mit } |x - y| < \delta.$$

Es gilt, dass $A \subset C^0(S; \mathbb{R}^p)$, mit S kompakt, genau dann kompakt ist, wenn A beschränkt, abgeschlossen und gleichgradig stetig ist.

2. Aufgabe

Wir betrachten den Vektorraum l^∞ der beschränkten Folgen reeller Zahlen. Wir zeigen, dass durch

$$||(a_n)||_\infty = \sup_{n \in \mathbb{N}} |a_n|$$

eine Norm auf l^∞ definiert wird.
Gibt es eine beschränkte Folge (b_n) mit Elementen $b_n \in l^\infty$, die keinen Häufungspunkt besitzt?

3. Aufgabe (Hausaufgabe von Blatt 2)

Sei $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch $d(x, y) := |\arctan(x) - \arctan(y)|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Sei $U \subset \mathbb{R}$. Dann ist U genau dann offen in $(\mathbb{R}, d)$, wenn U offen in $(\mathbb{R}, d^1)$ ist. Damit stimmen die offenen Mengen von $(\mathbb{R}, d)$ mit denen von $(\mathbb{R}, d^1)$ überein.

Hausaufgaben

1. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei X ein normierter Vektorraum und seien $t_0, t_1, \dots t_n \in X$ endlich viele Punkte. Die Menge $\bigcup_{k=1}^n \{\alpha \cdot t_{k-1} + (1-\alpha) \cdot t_k,\ \alpha \in [0,1]\}$ heißt *Polygonzug*. Die Punkte $t_0, t_1, \dots, t_n$ sind die *Ecken* des Polygonzuges. Man kann einen Polygonzug auch als Kurve einer stückweise linearen Funktion auffassen.
Sei X ein normierter Vektorraum. Die stetige Funktion $f : I = [a,b] \subset \mathbb{R} \to X$ beschreibe ein Kurve in X. Zeigen Sie, dass diese stetige Kurve durch eine Folge von Polygonzügen gleichmäßig approximiert werden kann.

2. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei (X,d) ein metrischer Vektorraum über $\mathbb{R}$. Die Metrik d heißt *translationsinvariant*, falls

$$d(x-z, y-z) = d(x,y) \quad \text{für alle } x,y,z \in X$$

ist. Sie heißt *homogen*, falls

$$d(\alpha x, \alpha y) = |\alpha|\ d(x,y) \quad \text{für alle } x,y \in X \text{ und für alle } \alpha \in \mathbb{R}$$

gilt. Zeigen Sie:

a) Ist X ein normierter Vektorraum und d die von der Norm auf X induzierte Metrik, so ist d translationsinvariant und homogen.

b) Ist d translationsinvariant und homogen, so gibt es eine Norm auf X, die d induziert.

c) Ist die diskrete Metrik auf $X \neq \{0\}$ von einer Norm induziert?

3. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei $W = \{\, (a\cos + b\sin)\big|_{[0,2\pi]} \mid a,b \in \mathbb{R}\,\} \subset C^1([0,2\pi])$ versehen mit der Norm $\|f\| = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}(f(x))^2 dx}$.

a) Zeigen Sie, dass $\Phi\colon W \to \mathbb{R}^2$, $(a\cos + b\sin)\big|_{[0,2\pi]} \mapsto (a,b)$ ein Isomorphismus ist, und dass für alle $f \in W$ gilt $\|\Phi(f)\|_2 = \|f\|$.

b) Zeigen Sie, dass die Ableitung $A\colon W \to W$, $f \mapsto f'$ eine stetige lineare Abbildung ist, und dass gilt

$$\Phi \circ A \circ \Phi^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

Zwei Zusatzpunkte gibt es, wenn Sie direkt und mit der Aussage von b) zeigen, dass $A^4 = A \circ A \circ A \circ A = \mathrm{Id}\big|_W$.

4. Aufgabe

(5 Punkte)

Sei $\|\cdot\|$ eine Norm auf dem $\mathbb{R}^n$ und sei

$$\|A\| = \sup_{x\neq 0} \frac{\|Ax\|}{\|x\|}$$

die induzierte Matrixnorm, d.h. Operatornorm, auf $\mathbb{R}^{n\times n}$.
Zeigen Sie, dass für die Maximumsnorm $\|x\|_\infty := \max\limits_{i=1,\dots,n} |x_i|$ gilt

$$\|A\|_\infty = \max_{i=1,\dots,n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Weisen Sie außerdem für die 1-Norm $\|x\|_1 := \sum_{i=1}^n |x_i|$ die folgende Beziehung nach

$$\|A\|_1 = \max_{j=1,\dots,n} \sum_{i=1}^{n} |a_{ij}|.$$

Interpretieren Sie die Begriffe *Spaltensummennorm* und *Zeilensummennorm* anhand obiger Ergebnisse.

Zusatzaufgabe

(6 Punkte)

Seien V und W zwei normierte Vektorräume und V endlich dimensional. Zeigen Sie: Wenn W ein Banachraum ist, so ist $L(V, W)$ mit der Operatornorm ein Banachraum.

Gesamtpunktzahl: 20