TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik Abgabe: 4. Juni 2007 (vor der Großübung)
Ferus / Garcke `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/Analysis2`

6. Übung Analysis II

(Ableitung, Kettenregel, Produktregel)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Berechnen Sie die Ableitungen der folgenden auf $\mathbb{R}^n$ definierten Abbildungen f. D.h. geben Sie die lineare Abbildung $D_pf : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ bzw. $\mathbb{R}^n$ an

a) $f(x) = \langle a, x\rangle$ b) $f(x) = \langle a, x\rangle a$ c) $f(x) = \langle x, x\rangle$

d) $f(x) = \langle a, x\rangle\langle b, x\rangle$ e) $f(x) = \langle x, x\rangle x$

2. Aufgabe

a) Seien p, $v \in V$. Geben Sie ein Beispiel für eine differenzierbare Kurve $\gamma\colon \mathbb{R} \supset\,]-\epsilon, \epsilon[\, \to V$ mit $\gamma(0) = p$ und $\gamma'(0) = v$ an.

b) Sei γ eine differenzierbare Kurve wie in a) und $f\colon V \to W$ differenzierbar. Dann gilt für alle $v \in V$: $D_pf(v) = (f \circ \gamma)'(0)$.

c) Sei $f\colon V \to W$ differenzierbar. Dann sind äquivalent:

(i) $Df = 0$.

(ii) Für alle differenzierbaren Kurven $\gamma\colon \mathbb{R} \supset\,]-\epsilon, \epsilon[\, \to V$ gilt $(f \circ \gamma)' = 0$.

(iii) Die Abbildung f ist konstant.

3. Aufgabe

Seien $f : V \to \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar.

a) Zeigen Sie, dass $h \circ f$ differenzierbar ist und

$$D_p(h \circ f)(v) = h'(f(p))D_pf(v) \text{ gilt.}$$

b) Sei $f(p) \neq 0$, nun gilt dass $\frac{1}{f}$ in p differenzierbar ist und

$$D_p\left(\frac{1}{f}\right)(v) = -\frac{1}{f^2(p)}D_pf(v).$$

4. Aufgabe

Zeigen Sie mit Hilfe der Produkt– und Kettenregel, dass die folgenden Abbildungen differenzierbar sind, und geben Sie ihre Ableitungen an:

a) $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad (x, y, z) \mapsto (xz, \sin(x^2 + y^2), z),$

b) $g\colon L(V, W) \times L(U, V) \to L(U, W), \qquad (A, B) \mapsto A \circ B.$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (7 Punkte)

Seien V und W endlich–dimensionale Banachräume.

Eine Abbildung $f\colon V \to W$ heißt *positiv homogen vom Grad* $k \in \mathbb{N}$, falls $f(tv) = t^k f(v)$ für alle $t > 0$ und $v \in V$ gilt.

Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.

a) Ist f positiv homogen vom Grad k und differenzierbar in allen Punkten $v \in V \setminus \{0\}$, so gilt $D_v f(v) = kf(v)$ für alle $v \in V \setminus \{0\}$.

b) Seien $k \in \mathbb{N}$, $f(0) = 0$, f differenzierbar in allen Punkten $v \in V \setminus \{0\}$ und $D_v f(v) = kf(v)$. Dann ist f positiv homogen vom Grad k.

(Hinweis: Betrachten Sie die Abbildung $]0, \infty[\to W$, $t \mapsto t^{-k} f(tv)$.)

2. Aufgabe (3 Punkte)

Sei $A \in L(V, W)$. Bestimmen Sie $D_v(DA)$ für alle $v \in V$, d.h. die Ableitung von $DA\colon V \to L(V, W)$.

3. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $U_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} \subset \mathbb{R}^2$ und sei $f\colon U_1(0) \to \mathbb{R}^3$, $(x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2})$.

a) Zeigen Sie, dass f differenzierbar ist, und geben Sie Df an. Verwenden Sie dabei *nicht* die Jacobimatrix.

b) Zeigen Sie, dass $\langle f(p), D_p f(v)\rangle = 0$ für alle $p \in U_1(0)$ und $v \in \mathbb{R}^2$ gilt.

(Hinweis: $\langle x, y\rangle := x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$)

c) f beschreibt den Graphen einer Funktion — welcher?
Was bedeutet b) für die Tangentialebenen an den Graphen dieser Funktion?

4. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben seien B, $C \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und die Funktion

$$f : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}^{n\times n}, \quad A \mapsto (A + B)^2 + A + C.$$

Bestimmen Sie die Ableitung von f in A.

Gesamtpunktzahl: 20