**TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN** SS 07
**Institut für Mathematik** Abgabe: 11. Juni 2007 (vor der Großübung)
Ferus / Garcke `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/Analysis2`

# 7. Übung Analysis II

(Ableitung, Rechenregeln, partielle Ableitung, Richtungsableitung)

---

## Tutoriumsvorschläge

## 1. Aufgabe

Berechnen Sie von den folgenden Abbildungen die Jacobi-Matrix und die Ableitung, falls die Abbildung differenzierbar ist, im Punkt $p$.

a) $g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (x^2 y, z \ln(1 + x^2), e^{xz}), \quad p = (x_0, y_0, z_0)$

b) $h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, \sin(x + y) + \cos(y) + x), \quad p = (\frac{\pi}{2}, 0)$
Weiterhin ist die Richtungsableitung in $p$ in Richtung $v = (1, 1)$ mit Hilfe der Jacobi-Matrix und als Grenzwert zu berechnen.

## 2. Aufgabe

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x_1^2 \\ x_1 - 2x_2 \\ 3x_2 \end{pmatrix}$ und $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, \quad x \mapsto \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ x_1 x_3 - x_2 \\ x_3^2 \\ 2x_2 + x_3 \end{pmatrix}$.
Berechne $(f \circ g)'\left(\begin{smallmatrix} 1 \\ 1 \end{smallmatrix}\right)$.

## 3. Aufgabe (Polarkoordinaten)

Sei

$$P\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \qquad \left(\begin{smallmatrix} r \\ \varphi \end{smallmatrix}\right) \mapsto r\left(\begin{smallmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{smallmatrix}\right).$$

a) Skizzieren Sie die Bildmengen der Geraden $r = \text{const}$ und $\varphi = \text{const}$.

b) Berechnen Sie die Jacobi–Matrix von $P$. Ist $P$ differenzierbar?

c) Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $(x, y) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}}(x, y)$. Bestimmen Sie die Jacobi–Matrizen von $f$ und $f \circ P\big|_{\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 | r\neq 0\}}$ und überprüfen Sie die Kettenregel. Sind $f$ und $f \circ P\big|_{\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2 | r\neq 0\}}$ differenzierbar?

# 4. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert als

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{\sin x}{x} y & \text{für } x \neq 0 \\ y & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

a) In welchen Punkten ist $f$ stetig ?

b) Bestimmen Sie die partiellen Ableitungen von $f$, dort wo sie existieren.

c) In welchen Punkten ist $f$ differenzierbar ?

## Übungsaufgaben

# 1. Aufgabe (Zylinderkoordinaten)

Sei

$$Z\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \qquad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ z \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} r\cos\varphi \\ r\sin\varphi \\ z \end{pmatrix}.$$

a) Skizzieren Sie die Bildmengen der Ebenen $r =$ const, $\varphi =$ const und $z =$ const.

b) Berechnen Sie die Jacobi–Matrix von $Z$. Ist $Z$ differenzierbar?

c) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{\,(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mid y \neq 0\,\} \to \mathbb{R}^2$, $(x,y,z) \mapsto \begin{pmatrix} x^2+y^2 \\ \frac{(x^2+y^2)xz}{y} \end{pmatrix}$. Bestimmen Sie die Jacobi–Matrizen von $f$ und $f \circ Z\big|_{\{\,(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 \mid r\sin\varphi\neq 0\,\}}$ und überprüfen Sie die Kettenregel. Sind $f$ und $f \circ Z\big|_{\{\,(r,\varphi,z)\in\mathbb{R}^3 \mid r\sin\varphi\neq 0\,\}}$ differenzierbar?

# 2. Aufgabe (Ableitung von Parameterintegralen)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \supset [a,b] \times [c,d] \to \mathbb{R}$ stetig und in der ersten Variablen stetig partiell differenzierbar.

a) Dann ist die Abbildung $[a,b] \to \mathbb{R}$, $t \mapsto \int_c^d f(t,x)dx$ differenzierbar und

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_c^d f(t,x)dx = \int_c^d \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx.$$

b) Seien $h$, $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, dann gilt:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_{g(t)}^{h(t)} f(t,x)dx = \int_{g(t)}^{h(t)} \frac{\partial f}{\partial t}(t,x)dx + f(t,h(t))h'(t) - f(t,g(t))g'(t).$$

# Hausaufgaben

## 1. Aufgabe (Kugelkoordinaten) (10 Punkte)

Sei $K\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, $\begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto r\begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}$.

a) Skizzieren Sie die Bildmengen der Ebenen $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ und $\vartheta = \text{const}$.

b) Berechnen Sie die Jacobi–Matrix von $K$. Ist $K$ differenzierbar?

c) Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xy, x, z)$.

Bestimmen Sie die Jacobi–Matrizen von $f$ und $f \circ K\big|_{\{(r,\varphi,\vartheta)\in\mathbb{R}^3 | r\neq 0\}}$ und überprüfen Sie die Kettenregel. Sind $f$ und $f \circ K\big|_{\{(r,\varphi,\vartheta)\in\mathbb{R}^3 | r\neq 0\}}$ differenzierbar?

## 2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ durch

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 y}{x^4 + y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

definiert. Zeigen Sie:

a) Die Funktion $f$ ist nicht stetig, jedoch ist die Einschränkung auf jede Gerade stetig. (Geraden lassen sich mit Ausnahme der y-Achse in der Form $y(x) = ax$, $a \in \mathbb{R}$, darstellen.)

b) An jeder Stelle existieren alle Richtungsableitungen.

c) Mindestens eine der partiellen Ableitungen ist im Nullpunkt nicht stetig. (Hilfe: Ist $f$ im Nullpunkt differenzierbar?)

## 3. Aufgabe (4 Punkte)

Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $b$, $c$, $d \in \mathbb{R}^n$. Bestimmen Sie die Jacobi-Matrizen der Abbildungen

a) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n : \ x \mapsto A(x + b) + \langle c, x\rangle\, d$,

b) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} : \ x \mapsto \langle x, Bx\rangle^2 + \langle b - Ax, b\rangle$,

c) $f : \mathbb{R}^n \setminus \{0\} \to \mathbb{R} : \ x \mapsto \dfrac{\langle x, Ax\rangle}{\langle x, x\rangle}$.

Dabei bezeichnet $\langle\ ,\ \rangle$ das Standardskalarprodukt.

## Zusatzaufgabe

(5 Punkte)

Sei $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, sei $f : I \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Wir definieren

$$g : I^2 \to \mathbb{R}, \qquad g(x,y) = \begin{cases} \dfrac{f(x)-f(y)}{x-y} & \text{falls } x \neq y \\ f'(x) & \text{falls } x = y \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass $g$ genau dann stetig ist, wenn $f'$ stetig ist.

## Zusatzaufgabe

(3 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit

$$f(x) = \begin{pmatrix} \sqrt{3}x_1^2 + \cos(4x_1 - 2x_2) \\ \sqrt{3}x_2^2 + \sin(3x_1 + 5x_2) \end{pmatrix}$$

und bestimmen Sie – falls existent – die Funktionalmatrix von $f$.
Bestimmen Sie außerdem die Richtungsableitung von $f$ in Richtung $n = (1,1)^T$ im Punkt $x_1 = x_2 = \pi/4$.

Gesamtpunktzahl: 20