TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik Abgabe: 18. Juni 2007 (vor der Großübung)
Ferus / Garcke `http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/Analysis2`

8. Übung Analysis II

(Höhere Ableitungen, Differenzierbarkeit, Taylorformel)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Diskutieren Sie den Zusammenhang von n–fach differenzierbar, n–fach partiell differenzierbar, n–fach stetig partiell differenzierbar und beliebig oft differenzierbar.

2. Aufgabe

Kann es eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : (0, \frac{\pi}{2}) \times (0, \frac{\pi}{2}) \to \mathbb{R}$ geben, für die

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = \left(\frac{\tan x}{y}\right)^2 + y + \frac{1}{y^2} \qquad \text{und} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = -\frac{2\tan x}{y^3} + x$$

gilt? Bestimmen Sie gegebenenfalls f.

3. Aufgabe

Berechnen Sie die Hesseschen Matrizen der folgenden Funktionen.

a) $f\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\})^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$

b) $g\colon]0,\infty[^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x,y,z) \mapsto \frac{x\sqrt{z}}{y}$

4. Aufgabe

Bestimmen Sie von der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto \cos x \cos y$ das Taylorpolynom 1. Grades im Punkt $(\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4})$ und geben Sie das Restglied an.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Sei $y\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^2$, $(x_1, x_2) \mapsto (y_1, y_2) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(-x_2, x_1)$. Zeigen Sie:

a) $\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_2}$,

b) es gibt dennoch keine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ mit $f' = y$,

c) für $f\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $(x_1, x_2) \mapsto -\arctan(\frac{x_1}{x_2})$ gilt $f' = y$.

2. Aufgabe

Man bestimme alle (in $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ zweimal differenzierbaren) Lösungen f der „Laplaceschen Differentialgleichung“

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

die von der Form $\varphi(\sqrt{x^2 + y^2})$ sind.

3. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Zeigen Sie, dass es eine Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x, y) = g(x - y)$$

gibt.

Hausaufgaben

1. Aufgabe

(6 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch $(x,y) \mapsto f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

Zeigen Sie, dass die Funktion f überall zweimal partiell differenzierbar ist, dass aber $\partial_1\partial_2 f(0,0) \neq \partial_2\partial_1 f(0,0)$ gilt.
Ist f in $(0,0)$ stetig? Sind die ersten partiellen Ableitungen von f stetig? Sind alle zweiten partiellen Ableitungen von f stetig?

2. Aufgabe

(4 Punkte)

Sei $f\colon [a,b] \times [c,d] \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und sei die gemischte Ableitung $\frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} f$ stetig. Zeige mit Hilfe der 2. Übungsaufgabe von Blatt 7 (Ableitung von Parameterintegralen) dass $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} f$ existiert und es gilt $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial t} f = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial x} f$.
Hinweis: Betrachte dazu $f(t,x) = f(t,\alpha) + \int_\alpha^x \frac{\partial}{\partial x} f(t,\xi)d\xi$.

3. Aufgabe

(6 Punkte)

a) Bestimmen Sie alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$\partial_1\partial_2 f = 0.$$

b) Welche Lösungen hat die „Wellengleichung“: $\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x} f - \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial t} f = 0$?

Hinweis: Wenden Sie a) auf $f \circ \lambda$ *mit* $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u,v) \mapsto (u+v, u-v)$ *an.*

4. Aufgabe

(4 Punkte)

Betrachten Sie die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto e^{-x^2+2xy}$$

Berechnen Sie das Taylorpolynom zweiten Grades von f mit dem Entwicklungspunkt $(x_0, y_0) = (0,0)$.

Gesamtpunktzahl: 20