9. Übung Analysis II

(Taylorpolynom, lokale und globale Extrema, Differentialoperatoren)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Diskutieren Sie notwendige und hinreichende Kriterien für lokale Extrema einer Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ an den folgenden Beispielen:

$$f_1(x,y) = x^2 + 2y^2 \qquad f_2(x,y) = x^2 - 2y^2 \qquad f_3(x,y) = x^2$$
$$f_4(x,y) = -x^2 - 2y^2 \qquad f_5(x,y) = x^2 \pm y^4 \qquad f_6(x,y) = 3x^2y - y^3$$

2. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto (y - x^2)(y - 2x^2)$$

im Nullpunkt einen stationären Punkt aber kein lokales Minimum besitzt. Trotzdem besitzt die Einschränkung von f auf jede Gerade durch den Nullpunkt ein lokales Minimum in $(0,0)$.

3. Aufgabe

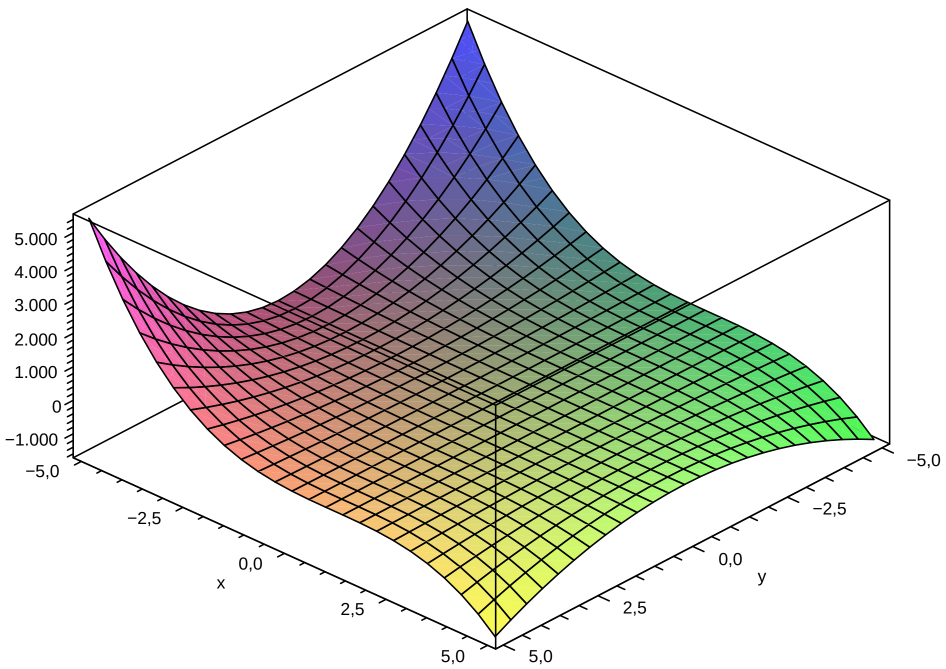
a) Zeigen Sie, dass ein Zentralfeld, d.h. ein Feld $v\colon \mathbb{R}^3\backslash\{0\} \to \mathbb{R}^3$, $x \mapsto \frac{x}{\|x\|} f(\|x\|)$ mit einer beliebigen differenzierbaren Funktion $f\colon \mathbb{R}\backslash\{0\} \to \mathbb{R}$, wirbelfrei ist, d.h. $\operatorname{rot} v = 0$.

b) Für welche Funktionen f ist das Vektorfeld aus a) auch quellenfrei, d.h. $\operatorname{div} v = 0$?

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + (1 - x)^3 y^2$ auf lokale Extrema.
Nimmt f ihr Maximum oder ihr Minimum an?



2. Aufgabe

Sei $\emptyset \neq G \subset \mathbb{R}^n$ und G offen und beschränkt. Sei $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, die auf G differenzierbar ist.
Beweisen Sie die folgenden Behauptungen.
Falls $D_p f \neq 0$ für alle $p \in G$ gilt, so nimmt f ihr Maximum und ihr Minimum auf ∂G an.
Falls $D_p f = 0$ für genau ein $p \in G$ gilt, so nimmt f ihr Maximum oder ihr Minimum auf ∂G an.

3. Aufgabe

Sei Ω eine offene, konvexe Menge des $\mathbb{R}^n$. Dann ist eine differenzierbare Funktion f genau dann konvex, wenn die Ungleichung

$$f(x + h) \geq f(x) + \langle \nabla f(x), h \rangle$$

für alle x und $x + h \in \Omega$ erfüllt ist.
f ist strikt konvex genau dann wenn die Ungleichung mit $>$ gilt.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^4 + y^4 - (x + y)^2$.

Finden Sie alle kritischen Punkte der Funktion f und entwickeln Sie f um jeden kritischen Punkt in ein Taylorpolynom 2. Grades.
Skizzieren Sie die kritischen Punkte und den Höhenlinienverlauf der in diesen Punkten entwickelten Taylorpolynome in der x–y–Ebene.

2. Aufgabe (4 Punkte)

a) Seien $f, g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ zweimal stetig differenzierbare Funktionen. Zeigen Sie, dass

$$\Delta(fg) = g\Delta f + 2\langle\nabla f, \nabla g\rangle + f\Delta g$$

gilt, wobei $\langle\cdot,\cdot\rangle$ das Euklidische Skalarprodukt bezeichnet und $\nabla f = \operatorname{grad} f$.

b) Zeigen Sie, dass für die Zuordnung $x \mapsto \omega \times x$ mit einem festen Vektor $\omega \in \mathbb{R}^3$

$$\operatorname{rot}(\omega \times x) = 2\omega$$

gilt.

3. Aufgabe (4 Punkte)

Gegeben seien die Datenpunkte $(x_j, y_j) \in \mathbb{R}^2$ für $1 \le j \le n$. Die *Regressionsgerade* für diese Daten ist die Gerade $y = \lambda x + c$ im $\mathbb{R}^2$ welche die Summe der Quadrate der vertikalen Abstände zwischen der Gerade und den gegeben Punkten minimiert. D.h. wir suchen (λ, c) so dass $\sum_{j=1}^n (\lambda x_j + c - y_j)^2$ minimiert wird. Zeigen Sie, dass dies nur der Fall sein kann wenn gilt

$$\lambda = \frac{\overline{xy} - \overline{x}\,\overline{y}}{\overline{x^2} - \overline{x}^2}, \qquad c = \overline{y} - \lambda\overline{x}.$$

Wir bezeichnen hierbei mit $\bar{x}$ den Durchschnitt einer Variablen im $\mathbb{R}^n$, d.h.

$$\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{1\le j\le n} x_j, \quad \overline{x^2} = \frac{1}{n}\sum_{1\le j\le n} x_j^2, \quad \overline{xy} = \frac{1}{n}\sum_{1\le j\le n} x_j y_j, \quad \text{usw.}$$

4. Aufgabe (6 Punkte)

Bestimmen Sie alle lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen.

a) $f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto \frac{1}{xyz}$

b) $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x^3 - y^3 - 3(x - y)$

Zusatzaufgabe

(4 Punkte)

Seien $c \in \mathbb{R}^+$ und $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 4c\}$. Sei $f : M \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto xyz(4c - x - y - z)$.
Bestimmen Sie den größten Wert der Funktion f.

Hinweis: Bestimmen Sie ∂M und zeigen Sie zuerst, dass für $(x, y, z) \in \partial M$ auf dem Rand $f(x, y, z) = 0$ ist. Folgern Sie daraus, dass das Maximum im Inneren von M, also in $\mathring{M}$ liegen muss. Berechnen Sie dann das Maximum.

Gesamtpunktzahl: 20