TECHNISCHE UNIVERSITÄT BERLIN SS 07
Institut für Mathematik Abgabe: 9. Juli 2007 (vor der Großübung)
Ferus / Garcke http://www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SS07/Analysis2

11. Übung Analysis II

(implizite Funktionen, Mannigfaltigkeiten, Extremwerte unter Nebenbedingungen)

Tutoriumsvorschläge

1. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen zweidimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$ sind und geben Sie eine Gleichung für ihre Tangentialräume an (a, b, $c > 0$):

a) Sphäre $= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = a^2 \}$,

b) Ellipsoid $= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \}$,

c) zweisch. Hyperboloid $= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = -1 \}$,

d) einsch. Hyperboloid $= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 1 \}$,

e) Kegel $= \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 - \left(\frac{z}{c}\right)^2 = 0 \}$.

2. Aufgabe

Sei $B_2(0) = \{ (x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 \leq 4 \}$. Bestimmen Sie die lokalen und globalen Extrema des Abstandes der Punkte in $B_2(0)$ vom Punkt $(1, 0)$.

3. Aufgabe

Bestimmen Sie lokale und globale Extrema der Höhenfunktion $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $(x, y, z) \mapsto z$ auf dem Torus $T^2 = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid (\sqrt{x^2 + z^2} - \sqrt{2})^2 + y^2 = 1 \}$. Skizzieren Sie die Höhenlinien von h auf T^2.

Übungsaufgaben

1. Aufgabe

Sei $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $p_0 \in \mathbb{R}^2$ mit $\operatorname{grad}_{p_0} f \neq 0$ und sei $M := f^{-1}(\{f(p_0)\})$.

Zeigen Sie, dass es eine stetig differenzierbare Kurve $\alpha\colon\,]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ gibt mit $\alpha(0) = p_0$ und $\alpha'(0) \neq 0$ und dass die folgenden vier Mengen gleich sind:

$$\begin{aligned}
T_1 &= \{\, v \in \mathbb{R}^2 \mid \exists\, \gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to M \text{ mit } \gamma(0) = p_0,\, \gamma'(0) = v \,\},\\
T_2 &= \operatorname{Kern} D_{p_0} f,\\
T_3 &= \{\, v \in \mathbb{R}^2 \mid v \perp \operatorname{grad}_{p_0} f \,\},\\
T_4 &= \operatorname{Bild}(D_0 \alpha).
\end{aligned}$$

Diese Menge nennt man den *Tangentialraum* $T_{p_0}M$ von M in p_0.

2. Aufgabe

Zeigen Sie, dass die folgenden Mengen eindimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^2$ sind und geben Sie eine Gleichung für ihre Tangentialräume an:

a) Ellipse $= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 1 \,\}$, a, $b > 0$,

b) Hyperbel $= \{\, (x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid \left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = \pm 1 \,\}$, a, $b > 0$.

Desweiteren wird es einen Überblick zur Vorlesung mit Wiederholung von wichtigen Definitionen und Sätzen geben. Dies wird nächste Woche fortgesetzt.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Sei $p_0 \in \mathbb{R}^3$ mit $\operatorname{grad}_{p_0} f \neq 0$ und sei $M := f^{-1}(\{f(p_0)\})$ die Höhenfläche von f, die p_0 enthält.

a) Zeigen Sie, dass M sich lokal als Graph über der Ebene $\operatorname{Kern} D_{p_0} f$ darstellen lässt.

b) Beschreiben Sie den Tangentialraum $T_{p_0}M := \{\, v \in \mathbb{R}^3 \mid \exists\, \gamma :]-\varepsilon,\varepsilon[\to M$ mit $\gamma(0) = p_0,\, \gamma'(0) = v \,\}$ durch eine lineare Gleichung und eine Parametrisierung (wie immer mit Beweis).

   Wie erhält man aus dem Tangentialraum die Tangentialebene an M in p_0?

2. Aufgabe (5 Punkte)

Für welche $a, b, c \in \mathbb{R}$, sind die Kegelschnitte

$$K = \{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 - z^2 = 0,\ ax + by = c \}$$

eindimensionale Untermannigfaltigkeiten des $\mathbb{R}^3$? Geben Sie eine Gleichung für ihre Tangentialräume an. Skizzieren Sie die Kegelschnitte für charakteristische Werte von a, b und c.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Finden Sie auf dem Schnitt des Zylinders $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 = 1 \}$ und der Ebene $\{ (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x = z \}$ die Punkte minimalen und maximalen Abstandes zum Nullpunkt.

4. Aufgabe (4 Punkte)

Eine Firma kauft jeden Tag 1000 RSE[1] Rohschokolade ein, um daraus ihre unter Mathematikern sehr beliebten Pralinen herzustellen, wozu ihr drei Maschinen zur Verfügung stehen. Die erste stellt aus jeder RSE Pralinen im Wert von 3200 PWE[2] her, verursacht jedoch pro Tag 500000 PWE Fixkosten. Die zweite Maschine hat Fixkosten von 200000 PWE und stellt aus x RSE Pralinen im Wert von $5600x - 4x^2$ PWE her, wobei der quadratische Term auf mit zunehmender Auslastung steigende Schokoladenverdunstung zurückzuführen ist. Die dritte Maschine stellt aus x RSE Pralinen im Wert von $8800x - 12x^2$ PWE her. Sie verursacht keine Fixkosten, jedoch zweigen die sie betreibenden Subunternehmer illegalerweise die Hälfte der Rohschokolade für eigene Zwecke ab. Wie müssen die 1000 RSE pro Tag auf die drei Maschinen aufgeteilt werden, damit der Erlös maximal wird? Formulieren Sie das Problem als Minimierungsproblem unter Nebenbedingungen und lösen Sie es mit Hilfe der Lagrangeschen Multiplikatoren.

Zusatzaufgabe (5 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar. Sei $a \in \mathbb{R}^n$ mit

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \neq 0 \qquad \forall i \in \{1, 2, \dots, n\}.$$

Setze

$$M = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) = f(a)\}.$$

Zu $x = (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$ bezeichne $\hat{x}_i = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^{n-1}$ den Punkt ohne die i-te Koordinate. Gemäß dem Satz über implizite Funktionen läßt sich jede Koordinate x_i von $x \in M$ in einer Umgebung U von a als Funktion der restlichen Koordinaten $\hat{x}_i$ darstellen: $x \in M \cap U \Leftrightarrow x_i = \varphi_i(\hat{x}_i)$. Zeige:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x_2}(\hat{x}_1) \cdot \frac{\partial \varphi_2}{\partial x_3}(\hat{x}_2) \cdot \ldots \cdot \frac{\partial \varphi_{n-1}}{\partial x_n}(\hat{x}_{n-1}) \cdot \frac{\partial \varphi_n}{\partial x_1}(\hat{x}_n) = (-1)^n$$

Gesamtpunktzahl: 20

[1] RSE = Rohschokoladeneinheit

[2] PWE = Pralinenwährungseinheit