Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Sekr. MA 8-2 / Frau Schubert

SoSe 07
Ausgabe: 24.05.2007
Abgabe: 31.05.2007

Albrecht Gündel vom Hofe
José Mendez

6. Übung zur Analysis III

1. Präsentationsaufgabe

   (a) Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge, die sternförmig bezüglich $\mathbf{x}_0 \in B$ ist. Zeige: B ist zusammenhängend.

   (b) Seien $B \subset \mathbb{R}^n$ eine beliebige offene Menge, die sternförmig bezüglich $\mathbf{x}_0 \in B$ ist und $f : B \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Abbildung. Ist $f(B) \subset \mathbb{R}^n$ sternförmig bezüglich $f(\mathbf{x}_0)$?

   (c) Man zeige: Sei $K \subset \mathbb{R}^n, K \neq \emptyset$ eine beliebige konvexe Menge. Dann ist K sternförmig.

   (5 Punkte)

2. Sei $B \subset \mathbb{R}^n$ und $\mathcal{K} := \{K \subset \mathbb{R}^n : K \text{ konvex} \wedge B \subset K\}$. Zeige:

   (a) Sei $D := \{\bigcap_{K \subset \mathcal{K}} K\}$. Dann ist D konvex.

   (b) $\forall K \subset \mathcal{K} \qquad \overline{K}$ ist konvex

   (5 Punkte)

3. Sei $G \subset \mathbb{R}^n$ Gebiet, $\boldsymbol{F} = (F_1, \ldots, F_n) : G \to \mathbb{R}^n$ mit $\boldsymbol{F} \in \mathcal{C}^1(G)$, $\boldsymbol{F}$ Vektorfeld auf G. Es gilt:
   Ist G sternförmig und $\frac{\partial F_i}{\partial x_j} = \frac{\partial F_j}{\partial x_i}$ für alle $1 \leq i, j \leq n$, so existiert eine Potentialfunktion $f : G \to \mathbb{R}$ mit $\nabla f = \boldsymbol{F}$ auf G (In der Vorlesung bewiesen).
   Zeige: Aus der Existenz einer Potentialfunktion f folgt nicht die Sternförmigkeit von G

   (4 Punkte)

4. (a) Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stückweise stetig differenzierbare Funktion mit $f(x) \geq 0$ für alle $x \in [a, b]$. Zeigen Sie: Durch das Kurvenintegral

   $$\int_{\boldsymbol{\alpha}} -y dx$$

   wird der Flächeninhalt des Bereichs B berechnet, der vom Graphen von f, der $x-$Achse und den Geraden $x = a$ und $x = b$ berandet wird.

(b) Zeigen Sie, dass für jeden geschlossenen Integrationsweg $\boldsymbol{\alpha}$ gilt:

$$\int_{\boldsymbol{\alpha}} -ydx = \int_{\boldsymbol{\alpha}} xdy$$

und folgern Sie daraus, dass der Flächeninhalt $F(B)$ von B in $a)$ dargestellt wird durch

$$F(B) = \frac{1}{2}\int_{\boldsymbol{\alpha}} xdy - ydx.$$

(c) Unter Verwendung der Formel aus Teil $b)$ für einen beliebigen von einem Integrationsweg $\boldsymbol{\alpha}$ berandeten Bereich $B \subset \mathbb{R}^2$, der jeweils zur Linken von $\boldsymbol{\alpha}$ liegt, beweise man die Leibnizsche Sektorformel

$$F(B) = \frac{1}{2}\int_{\phi_1}^{\phi_2} r^2(\phi)d\phi,$$

wenn ∂B in der Form $\boldsymbol{\beta}(\phi) := r(\phi)(\cos\phi, \sin\phi), \quad \phi_1 \leq \phi \leq \phi_2$ parametrisiert werden kann. Berechnen Sie damit den Flächeninhalt $F(B)$ des Bereichs $B \subset \mathbb{R}^2$, der von der Kardioide berandet wird, gegeben durchb $\boldsymbol{\alpha}(t) := F(\beta(t))$ mit

$$F(x, y) = (x^2 - y^2, 2xy), \quad \boldsymbol{\beta}(t) = (1 + \cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

(6 Punkte)