SS 2008 | Technische Universität Berlin
Prof. Dr. John M. Sullivan | Fakultät II
Kerstin Günther | Institut für Mathematik

Nachklausur Analysis I

07.10.2008

Name: Matr.-Nr.:
Vorname: Studiengang:

Mit der Veröffentlichung des Ergebnisses meiner Klausur (nur Matrikelnummer und Punktzahl) im Internet sowie am schwarzen Brett neben dem Raum MA 320 bin ich einverstanden:
Unterschrift (optional): ____________________

Geben Sie bei allen Antworten einen Beweis bzw. ein Gegenbeispiel an. Bitte beginnen Sie für jede Aufgabe ein neues Blatt und beschriften Sie dieses mit Ihrem Namen sowie Ihrer Matrikelnummer.
Die Klausur ist mit 25 Punkten bestanden. Die Bearbeitungszeit beträgt 110 Minuten. Schreiben Sie nicht mit Bleistift.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	7	8	Summe
Punkte									
Korrektor									

Aufgabe 1 Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, dass für die in $\mathbb{R}$ rekursiv definierte Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit (7 Punkte)

$$a_0 := 0, \qquad a_{n+1} := 1 - \frac{1}{2+a_n}, \quad n \in \mathbb{N}$$

gilt: $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie weiterhin, dass der Grenzwert der Folge in $\mathbb{R}$ existiert und bestimmen Sie diesen Grenzwert.

Aufgabe 2 Sei $a_n := \frac{n-1}{n+1}$ für $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie (mittels der Definition von Konvergenz), dass die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen 1 konvergiert. (3 Punkte)

Aufgabe 3 (4 Punkte)

(a) Untersuchen Sie die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1+2^n}{2^{n+1}}\right)^n$ auf Konvergenz.

(b) Bestimmen Sie die Reihensumme von $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n+2^n}{3^n}$.

Aufgabe 4 Sind die folgenden Aussagen richtig oder falsch? (16 Punkte)

(a) Sei $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, so konvergiert auch $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. (Hinweis: Es gilt die umgekehrte Dreiecksungleichung: $\big||x|-|y|\big| \leq |x-y|$ für $x, y \in \mathbb{R}$.)

(b) Sei $a_n \in \mathbb{R}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Konvergiert die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$, so konvergiert auch $\sum_{n=1}^{\infty} {a_n}^4$.

(c) Sei A eine Indexmenge. Seien $F_\alpha \subseteq \mathbb{R}$ abgeschlossen für alle $\alpha \in A$. Dann ist $\bigcup_{\alpha\in A} F_\alpha$ in $\mathbb{R}$ abgeschlossen.

(d) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := x\,|x|$ für $x \in \mathbb{R}$ ist auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(e) Ist $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig und $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar, so ist fg auf $\mathbb{R}$ differenzierbar.

(f) Die Funktion $f : [2,4] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 4x^2$ für $x \in [2,4]$ ist gleichmäßig stetig.

(g) Sei $D \subseteq \mathbb{R}$ und $x \in \mathbb{R}$ ein Häufungspunkt von D, welcher nicht in D enthalten sein muss. Weiterhin sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq D$ eine Folge, die gegen x konvergiert, und $f : D \to \mathbb{R}$ gleichmäßig stetig. Dann konvergiert $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathbb{R}$ ebenfalls.

Aufgabe 5 Bestimmen Sie folgende Grenzwerte – falls diese existieren: (3 Punkte)

(a) $\lim_{x\to 0} \frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x}$,

(b) $\lim_{x\to\infty} \sqrt{x^4+5x^2} - x^2$.

Aufgabe 6 An welchen Stellen ist die Funktion $f : [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}] \to \mathbb{R}$ definiert mit (6 Punkte)

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x}{\tan(\pi x)} & \text{für } x \in (-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) \setminus \{0\}, \\ 0 & \text{für } x \in \left\{-\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\right\} \end{cases}$$

stetig?

Aufgabe 7 Sei $f : [0, \frac{\pi}{2}] \to \mathbb{R}$ definiert durch $f(x) := \sin x - e^{-x}$ für $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$. Zeigen Sie, dass f genau eine Nullstelle im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ besitzt. (4 Punkte)

Aufgabe 8 Geben Sie das dritte Taylorpolynom T_3 der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert mit

$$f(x) := e^x \sin x, \quad x \in \mathbb{R}$$

an der Entwicklungsstelle $p = 0$ an. Zeigen Sie, dass der Fehler $|f(x) - T_3(x)|$ im Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ nicht größer als $\frac{\sqrt{e}}{6}\left(\frac{1}{2}\right)^4$ (bessere Abschätzungen sind ebenfalls möglich) ist, indem Sie das Restglied in Lagrange'scher Form nach oben abschätzen. (7 Punkte)

(Gesamtpunktzahl: 50 Punkte)

SS 2008
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

Lösungen zur Nachklausur Analysis I

vom 07.10.2008

Aufgabe 1 Zu zeigen: $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$. (3 P.)
Induktionsbeginn: Für $n = 0$ gilt $a_0 = 0 \leq \frac{1}{2} = a_1$.
Induktionsschritt: Für $n \in \mathbb{N}$ fest gelte $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$.
Dann

$$a_{n+2} = 1 - \frac{1}{2 + a_{n+1}} \geq 1 - \frac{1}{2 + a_n} = a_{n+1} \geq 0$$

Damit ist gezeigt, dass $0 \leq a_n \leq a_{n+1}$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt.
Zu zeigen: $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ besitzt Grenzwert. (2 P.)
Die Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend. Da $a_n \geq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, gilt

$$a_{n+1} = 1 - \frac{1}{2 + a_n} \leq 1, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Somit ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte und monotone Folge in $\mathbb{R}$. Folglich ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge und besitzt einen Grenzwert $a := \lim_{n\longrightarrow\infty} a_n$.
Aus (2 P.)

$$\lim_{n\longrightarrow\infty} a_{n+1} = a, \qquad \lim_{n\longrightarrow\infty} \left(1 - \frac{1}{2 + a_n}\right) = 1 - \frac{1}{2 + a}$$

erhalten wir $a = 1 - \frac{1}{2+a}$. Wegen $a \geq 0$ folgt $a = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

Aufgabe 2 Sei $\varepsilon > 0$. Wähle $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{2}{\varepsilon} - 1 \leq n_0$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$: (3 P.)

$$\left|\frac{n-1}{n+1} - 1\right| = \left|\frac{-2}{n+1}\right| = \frac{2}{n+1} \leq \frac{2}{n_0 + 1} \leq \varepsilon.$$

Aufgabe 3

(a) Es gilt: (2 P.)

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \frac{1 + 2^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2} \leq \frac{3}{4} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}^+$$

Folglich konvergiert die Reihe nach dem Wurzelkriterium (z.B. $q = \frac{3}{4}$) absolut.

(b) Es gilt (geometrische Reihe) (2 P.)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{-1}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{-1}{3}} = \frac{3}{4}, \qquad \sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{2}{3}\right)^n = \frac{1}{1-\frac{2}{3}} = 3.$$

Damit gilt (Rechenregeln):

$$\sum_{n=2}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^n} = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n+2^n}{3^n} - \frac{(-1)^0+2^0}{3^0} - \frac{(-1)^1+2^1}{3^1} = \frac{3}{4}+3-2-\frac{1}{3} = \frac{3}{4}+1-\frac{1}{3}.$$

Aufgabe 4

(a) Wahr: Sei $\varepsilon > 0$. Sei a der Grenzwert von $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Nach Voraussetzung existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $|a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$. Aus $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| \leq \varepsilon$ für alle $n \geq n_0$ folgt, dass $|a|$ der Grenzwert von $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ ist. Somit konvergiert $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$. (2 P.)

(b) Falsch: Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{\sqrt[4]{n}}$ konvergiert nach dem Leibnizkriterium, aber $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}$ konvergiert nicht. (2 P.)

(c) Falsch: Für $A = \mathbb{N}$ und $F_n := [\frac{1}{n}, 1-\frac{1}{n}]$ gilt: $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} F_n = (0,1)$. Aber $(0,1)$ ist in $\mathbb{R}$ nicht abgeschlossen. (2 P.)

(d) Wahr: Die Funktion f ist an jeder Stelle $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar, da die Betragsfunktion an jeder Stelle $p \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ differenzierbar ist. Es gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{x\,|x| - 0\,|0|}{x-0} = \lim_{x\to 0}|x| = 0.$$

Daher ist f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar. (3 P.)

(e) Falsch: Gegenbeispiel: $f(x) := |x|$ und $g(x) := 1$ für $x \in \mathbb{R}$. (2 P.)

(f) Wahr: Da $[2,4]$ folgenkompakt und f stetig ist, ist f gleichmäßig stetig (Vorlesung). (2 P.)

(g) Wahr: Sei $\varepsilon > 0$. Dann existiert $\delta > 0$, so dass für $x, y \in D$ mit $|x-y| < \delta$ gilt: $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge ist, existiert $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|x_m - x_n| < \delta$ für alle $m, n \geq n_0$. Somit gilt $|f(x_m) - f(x_n)| < \varepsilon$ für alle $m, n \geq n_0$ und deshalb ist $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $\mathbb{R}$. Cauchyfolgen in $\mathbb{R}$ konvergieren in $\mathbb{R}$. (3 P.)

Aufgabe 5

(a) Aus der Regel von l'Hospital (3x anwenden) folgt (2 P.)

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{x(1-\cos x)}{x-\sin x} &= \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x + x\sin x}{1-\cos x} = \lim_{x\to 0}\frac{2\sin x + x\cos x}{\sin x}\\ &= \lim_{x\to 0}\frac{3\cos x - x\sin x}{\cos x} = 3.\end{aligned}$$

(b) Es gilt (1 P.)

$$\lim_{x\to\infty}\sqrt{x^4+5x^2}-x^2 = \lim_{x\to\infty}\frac{x^4+5x^2-x^4}{\sqrt{x^4+5x^2}+x^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{5}{\sqrt{1+\frac{5}{x^2}}+1} = \frac{5}{2}.$$

Aufgabe 6 Die Funktion f ist an jeder Stelle $p \in (-\frac{1}{2},\frac{1}{2})\setminus\{0\}$ stetig (als Zusammensetzung von in p stetiger Funktionen). (1 P.)
Es gilt

$$\lim_{x\to -\frac{1}{2}} f(x) = 0 = f(-\frac{1}{2}), \qquad \lim_{x\to \frac{1}{2}} f(x) = 0 = f(\frac{1}{2}).$$

Damit ist f an den Stellen $-\frac{1}{2}$ und $\frac{1}{2}$ ebenfalls stetig (Vorlesung). (2 P.)
Nach der Regel von l'Hospital gilt

$$\lim_{x\to 0} f(x) = \lim_{x\to 0}\frac{1}{(1+(\tan\pi x)^2)\pi} = \frac{1}{\pi} \neq 0 = f(0).$$

Somit ist f an der Stelle 0 nicht stetig (Vorlesung). (3 P.)

Aufgabe 7 Da (2 P.)

$$\begin{aligned} f(0) &= -1 < 0,\\ f(\frac{\pi}{2}) &= 1-\mathrm{e}^{-\frac{\pi}{2}} > 0,\end{aligned}$$

folgt aus dem Zwischenwertsatz die Existenz einer Nullstelle.
Wegen (2 P.)

$$f'(x) = \cos x + \mathrm{e}^{-x} \geq \mathrm{e}^{-x} > 0, \quad x \in [0,\frac{\pi}{2}],$$

ist f auf $[0,\frac{\pi}{2}]$ streng monoton wachsend. Folglich besitzt f genau eine Nullstelle im Intervall $[0,\frac{\pi}{2}]$.

Aufgabe 8 Es gilt (3 P.)

$$\begin{aligned}
&f(0) = 0,\\
&f'(x) = \mathrm{e}^x \sin x + \mathrm{e}^x \cos x, \quad f'(0) = 1,\\
&f''(x) = 2\mathrm{e}^x \cos x, \quad f''(0) = 2,\\
&f'''(x) = 2\mathrm{e}^x \cos x - 2\mathrm{e}^x \sin x, \quad f'''(0) = 2.
\end{aligned}$$

Damit ist $T_3(x) = x + x^2 + \frac{1}{3}x^3$ das dritte Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle $p = 0$. Berechnung des Fehlers auf dem Intervall $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ mittels des Restglieds in Lagrange'scher Form: Für $x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ existiert ein y zwischen 0 und x, so dass (4 P.)

$$|f(x) - T_3(x)| = \left| f^{(4)}(y) \frac{x^4}{4!} \right|.$$

Insbesondere ist $y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$.
Es gilt

$$f^{(4)}(x) = -4\mathrm{e}^x \sin x.$$

Damit ergibt sich folgende Abschätzung:

$$\begin{aligned}
\max_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |f(x) - T_3(x)| &\leq \max_{x \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \max_{y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} \left| f^{(4)}(y) \frac{x^4}{4!} \right| \\
&\leq \max_{y \in [-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]} |-4\mathrm{e}^y \sin y| \left(\frac{1}{2}\right)^4 \frac{1}{4!} \leq \frac{\sqrt{\mathrm{e}}}{6} \left(\frac{1}{2}\right)^4.
\end{aligned}$$

Bessere Abschätzungen sind ebenfalls möglich.