SS 2008
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

1. Übungsblatt Analysis I

Abgabe: 28.04.2008

Achtung: Die Klausur wurde vorverlegt. Neuer Klausurtermin: 14.07.08.

Tutoriumsaufgaben

1. Die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ wurde in der Vorlesung wie folgt eingeführt:

$$m \cdot n := \psi_n(m), \quad m, n \in \mathbb{N},$$

wobei $\psi_0(m) := 0$ und $\psi_{s(n)}(m) := m + \psi_n(m)$.
Beweisen Sie die folgende Aussagen.

(a) $\psi_n(0) = 0$,

(b) Für beliebige $m \in \mathbb{N}$ gilt

$$\psi_n(s(m)) = n + \psi_n(m) \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

(c) Zeigen Sie mittels (b), daß die Multiplikation auf $\mathbb{N}$ eine kommutative Verknüpfung ist.

2. Beweisen Sie die folgende Aussagen.

(a)

$$i \cdot k \leq j \cdot k \iff i \leq j \quad \text{für alle } i, j \in \mathbb{N},\ k \in \mathbb{N}^+,$$
$$i + k \leq j + k \iff i \leq j \quad \text{für alle } i, j, k \in \mathbb{N}.$$

(b) Es existieren keine $m, n \in \mathbb{N}$ mit $m < n < m + 1$.

3. Zeigen Sie, daß die in der Vorlesung eingeführte Muliplikation auf $\mathbb{Z}$ wohldefiniert, assoziativ und kommutativ ist. Bestimmen Sie die Identität.

Hausaufgaben

1.1 Beweisen Sie durch vollständige Induktion: (5 Punkte)

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6} \quad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

1.2 Zeigen Sie für die in Aufgabe 1 betrachtete Multiplikation auf $\mathbb{N}$, daß das Distributivgesetz gilt. Beweisen Sie, daß diese Multiplikation assoziativ ist. (5 Punkte)

1.3 Es sei $(R, +, \cdot)$ ein Ring und $\leq$ eine totale Ordnung auf R. Falls (5 Punkte)

(a) $x, y > 0 \implies xy > 0$ für alle $x, y \in R$,

(b) $x \leq y \implies x + z \leq y + z$ für alle $x, y, z \in R$,

dann heißt R angeordneter Ring.
Zeigen Sie, daß $\mathbb{Z}$ die in (a) und (b) beschriebenen Eigenschaften erfüllt sind.