SS 2008
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

12. Übungsblatt Analysis I

keine Abgabe

Übungsaufgaben

1. Bestimmen Sie das dritte Taylorpolynom an der Entwicklungsstelle $p = 1$ von $f : (-2, +\infty) \to \mathbb{R}$, wobei

$$f(x) := \log(2 + x), \quad x \in (-2, +\infty).$$

Zeigen Sie, daß der Fehler im Intervall $[0, 2]$ nicht größer als 0,02 ist indem Sie das Restglied in Lagrange'scher Form nach oben abschätzen.

2. (a) Zeigen Sie unter Benutzung des Logarithmus' sowie der Taylorpolynome, daß für alle $x \in \mathbb{R}$

$$\lim_{n\to\infty} (1 + \frac{x}{n})^n = e^x$$

gilt.

(b) Beweisen Sie mit (a), daß für alle $x > -n$

$$(1 + \frac{x}{n})^n \leq e^x$$

gilt.

3. (a) Bestimmen Sie das k-te Taylorpolynom von Sinus an der Entwicklungsstelle $p = 0$, wobei $k \in \{0, 1, 2, \ldots, 6\}$ ist.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Schätzen Sie das zum n-ten Taylorpolynom von Sinus an der Entwicklungsstelle $p = 0$ gehörige Restglied (in Lagrange'scher Form) ab.

(c) Anwendung: Modell des mathematischen Pendels.

Tutoriumsaufgaben

1. Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine konvexe Funktion, wobei $-\infty < a < b < +\infty$. Weiterhin seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$, $x_1, \ldots, x_n \in [a, b]$ sowie $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in [0, 1]$ mit $\sum_{j=1}^{n} \lambda_j = 1$.

(a) Zeigen Sie mittels vollständiger Induktion, daß gilt:

$$f(\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j) \leq \sum_{j=1}^{n} \lambda_j f(x_j).$$

(b) Seien nun $x_1, \ldots, x_n > 0$. Zeigen Sie mittels des Logarithmus' und (a), daß gilt:

$$\sum_{j=1}^{n} \lambda_j x_j \geq \prod_{j=1}^{n} x_j^{\lambda_j}.$$

2. Gesucht ist das n-te Taylorpolynom für folgende Funktionen f und die angegebenen Entwicklungsstellen p:

   (a) $f(x) := x \cdot \cos x, \quad n = 5, \quad p = 0,$

   (b) $f(x) := (x-1) \cdot \big(\log((x-1)^3) + x + 1\big), \quad n \in \mathbb{N}$ beliebig , $\quad p = 2.$

3. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) := \cos(2x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

   Bestimmen Sie das fünfte Taylorpolynom von f an der Entwicklungsstelle $p = \frac{\pi}{4}$. Zeigen Sie, daß der Fehler im Intervall $[0, \frac{\pi}{2}]$ kleiner als 0,1 bleibt indem Sie das Restglied in Lagrange'scher Form nach oben abschätzen.

Hausaufgaben (keine Abgabe)

12.1 Geben Sie die Taylorreihe der Funktion $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ definiert mit

$$f(x) := \log x, \quad x \in (0, +\infty)$$

um die Entwicklungsstelle $p = 1$ an. Zeigen Sie, daß diese Reihe für $0 < x \leq 2$ konvergiert und für $x = 0$ divergiert.

12.2 Ermitteln Sie die Taylorreihe an der Entwicklungsstelle 0 zu der Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert mit

$$f(x) := \sqrt{1 + \sin x}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergiert diese Reihe? (Hinweis: Es gilt $f''(x) = -\frac{1}{4} f(x)$.)

12.3 Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion mit $f(0) = \pi$, welche folgende Gleichung für alle $x \in \mathbb{R}$ erfüllt:

$$f'(x) = x + \cos f(x).$$

Bestimmen Sie das zweite Taylorpolynom von f an der Entwicklungsstelle $p = 0$.