SS 2008
Prof. Dr. John M. Sullivan
Kerstin Günther

Technische Universität Berlin
Fakultät II
Institut für Mathematik

9. Übungsblatt Analysis I

Abgabe: 23.06.2008

Übungsaufgaben

1. Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß der Limes inferior und der Limes superior in $\mathbb{R}$ liegen.

2. Seien (a_n) und (b_n) beschränkte Folgen in $\mathbb{R}$. Zeigen Sie, daß folgende Aussagen gelten:

   (a) $\varliminf\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n) \le \varliminf\limits_{n\to\infty} a_n + \varlimsup\limits_{n\to\infty} b_n \le \varlimsup\limits_{n\to\infty}(a_n+b_n)$,

   (b) $-\varlimsup\limits_{n\to\infty} a_n = \varliminf\limits_{n\to\infty}(-a_n)$.

3. Beweisen Sie folgende Aussagen:

   (a) Es gibt keine stetige Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die jeden Wert in $\mathbb{R}$ genau zweimal annimmt.

   (b) Es gibt eine Funktion $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, die jeden Wert in $\mathbb{R}$ genau zweimal annimmt.

4. Sei $D\subseteq\mathbb{R}$ und $f:D\to\mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion. Beweisen Sie folgende Aussage:

$$(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge in } D \Longrightarrow (f(a_n))_{n\in\mathbb{N}} \text{ Cauchyfolge.}$$

   Gilt diese Aussage auch, wenn f nur stetig ist?

Tutoriumsaufgaben

1. Sei (a_n) eine beschränkte Folge in $\mathbb{R}$.

   (a) Sei $n\in\mathbb{N}$ mit $\inf\limits_{k\ge n} a_k > 0$. Zeigen Sie, daß gilt:

$$\sup_{k\ge n}\frac{1}{a_k} = \frac{1}{\inf\limits_{k\ge n} a_k}.$$

(b) Sei $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n > 0$. Zeigen Sie mit (a), daß gilt:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{a_n} = \frac{1}{\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n}.$$

2. Sei $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) := \frac{1}{x}, \quad x \in (0, +\infty).$$

(a) Zeigen Sie, daß f auf $(0, +\infty)$ stetig aber nicht gleichmäßig stetig ist.

(b) Sei $a > 0$. Zeigen Sie, daß $f|_{[a,+\infty)}$ auf $[a, +\infty)$ gleichmäßig stetig ist.

3. Sei $A \subseteq D \subseteq \mathbb{R}$ und $f : D \to \mathbb{R}$. Weiterhin sei $f|_A$ stetig auf A und $p \in A$. Zeigen Sie, daß f in p nicht stetig sein muß.

Hausaufgaben

9.1 Beweisen Sie folgende Aussage: Seien X, Y total geordnete Mengen und $f : X \to Y$ streng monoton steigend. Dann ist f injektiv und die Umkehrabbildung

$$f^{-1} : f(X) \to X$$

ist ebenfalls streng monoton steigend. (Analoges gilt für streng monoton fallende Funktionen; ohne Beweis.) (3 Punkte)

9.2 Beweisen Sie folgende Aussage: Seien $a, b \in \mathbb{R}$ und $f : [a, b] \to [a, b]$ stetig. Dann hat f einen Fixpunkt $x = f(x)$. (5 Punkte)

9.3 Sind folgende Aussagen wahr oder falsch? (Beweisen Sie Ihre Antwort.) (7 Punkte)

(a) Die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := \frac{x^2}{1+x^2}$ $(x \in \mathbb{R})$ ist gleichmäßig stetig.

(b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion und seien $p, a \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\lim_{x\to p} \frac{f(x) - f(p)}{x - p} = a \implies \lim_{h\to 0^+} \frac{f(p + h) + f(p - h) - 2f(p)}{h} = 2a.$$