Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

Sommersemester 2008

Klausur zur VL Analysis II

17.07.2008

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Gebt bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an. Die Klausur ist mit 20 Punkten bestanden. Ihr habt 120 Minuten Zeit.

Viel Erfolg!

Hiermit erkläre ich mich mit der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses mit Matrikelnummer auf der Homepage der Veranstaltung einverstanden.

Berlin, den 17.07.2008 .... (Unterschrift)

1	2	3	4	5	6	$\sum$

1. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + (y + 1)^2$.

a) Zeige, dass $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 17 = f(0, 0)\} = f^{-1}(]-\infty, 17])$ eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^2$ ist und dass K nicht leer ist.

b) Zeige, dass die Funktion $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = f(x, y)$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

c) Zeige, dass die Funktion f ihr Minimum annimmt, aber kein Maximum besitzt.

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = +\infty$ für alle Folgen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n)\|_2 = +\infty$ gilt.

2. Aufgabe (4 Punkte)

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Zeige: Ist X kompakt und f bijektiv, so ist auch f^{-1} stetig.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Für alle $c \in \mathbb{R}$ sei $N_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\} \neq \emptyset$ und es gelte $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \neq 0$ für alle $x \in N_c$.
Zeige: Zu jedem $c \in \mathbb{R}$ und $v = (v_1, \ldots, v_n) \in N_c$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ von $(v_1, \ldots, v_{n-1})$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$\{(x_1, \ldots, x_{n-1}, h(x_1, \ldots, x_{n-1})) \mid (x_1, \ldots, x_{n-1}) \in U\} \subseteq N_c.$$

4. Aufgabe (8 Punkte)

Zeige, dass der Raum

$$C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0\}$$

bzgl. der Norm $\| \cdot \|_\infty$ vollständig ist.
Zeige dieses explizit, d. h. verwende *nicht* die Vollständigkeit von $C(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

5. Aufgabe (9 Punkte)

a) Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $K > 0$ und $a > 1$ mit

$$\|F(x)\| \leq K\|x\|^a \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass F im Nullpunkt differenzierbar ist mit $DF(0) = 0$.

b) Sei $\alpha > 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x, y) = \begin{cases} |x|^\alpha |y|^\alpha & \text{für } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Bestimme jeweils $\alpha > 0$, so dass f im Nullpunkt stetig bzw. partiell differenzierbar bzw. differenzierbar ist und beweise deine Behauptung.

6. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = e^{-nx^2}$. Zeige, dass dann gilt:

$$\lim_{n \to \infty} \int_0^\infty f_n(x) \, \mathrm{d}x = 0.$$

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)