Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2008
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

Lösungsskizze zur Analysis II - Klausur vom 17.07.08

---

1. Aufgabe (8 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto f(x, y) = (x^2 - 4)^2 + (y + 1)^2$.

a) Zeige, dass $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid f(x, y) \leq 17 = f(0, 0)\} = f^{-1}(\,]-\infty, 17])$ eine kompakte Menge des $\mathbb{R}^2$ ist.

b) Zeige, dass die Funktion $g : K \to \mathbb{R}$, $g(x, y) = f(x, y)$ ihr Maximum und ihr Minimum annimmt.

c) Zeige, dass die Funktion f ihr Minimum annimmt, aber kein Maximum besitzt.

Hinweis: Es darf ohne Beweis verwendet werden, dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = +\infty$ für alle Folgen $(x_n, y_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}^2$ mit $\lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n)\|_2 = +\infty$ gilt.

Beweis.

a) Nach Heine-Borel genügt es zu zeigen, dass K abgeschlossen und beschränkt ist.
Da $(-\infty, 17]$ abgeschlossen in $\mathbb{R}$ und f als Komposition stetiger Funktionen stetig ist, ist $f^{-1}(\,]-\infty, 17]) = K$ abgeschlossen in $\mathbb{R}^2$.
Angenommen, K wäre unbeschränkt. Dann existiert eine Folge $(x_n, y_n)_{n\in N} \subseteq K$ mit $\lim_{n\to\infty} \|(x_n, y_n)\|_2 = +\infty$. Nach dem Hinweis folgt dann aber auch $\lim_{n\to\infty} f(x_n, y_n) = +\infty$ und somit kann nicht mehr $f(x_n, y_n) \leq 17$ bzw. $(x_n, y_n) \in K$ für alle $n \in \mathbb{N}$ gelten. Also muss K beschränkt sein.

b) Da K nach (a) kompakt ist und $f|_K$ stetig ist, folgt die Behauptung nach Satz aus VL.

c) Aufgrund des Hinweises kann f kein globales Maximum auf $\mathbb{R}^2$ besitzen.
Zeige nun noch, dass das Minimum von $f|_K$ auch das globale Minimum von f ist. Nach (b) existiert ein $(x_0, y_0) \in K$ mit $f(x_0, y_0) \leq f(x, y) \leq f(0, 0) = 17$ für alle $(x, y) \in K$. Dann kann es kein $(\hat{x}, \hat{y}) \in \mathbb{R}^2 \setminus K$ geben mit $f(\hat{x}, \hat{y}) < f(x_0, y_0)$, da sonst $f(\hat{x}, \hat{y}) > 17 = f(0, 0)$.
Somit nimmt f in $(x_0, y_0) \in K$ sein globales Minimum an.

□

2. Aufgabe (4 Punkte)

Seien X, Y metrische Räume und $f : X \to Y$ stetig. Zeige: Ist X kompakt und f bijektiv, so ist auch f^{-1} stetig.

Beweis.
Sei $A \subseteq X$ abgeschlossen. Um zu zeigen, dass f^{-1} stetig ist, genügt es zu zeigen, dass das Urbild $(f^{-1})^{-1}(A) = f(A) \subseteq Y$ abgeschlossen ist.
Da X kompakt ist, ist A als abgeschlossene Teilmenge ebenfalls kompakt und aufgrund der Stetigkeit von f ist auch $f(A)$ kompakt, also insbesondere abgeschlossen. Somit ist f^{-1} stetig. □

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}$, $n > 1$ und $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ stetig differenzierbar.
Für alle $c \in \mathbb{R}$ sei $N_c := \{x \in \mathbb{R}^n \mid f(x) = c\} \neq \emptyset$ und es gelte $\frac{\partial f}{\partial x_n}(x) \neq 0$ für alle $x \in N_c$.
Zeige: Zu jedem $c \in \mathbb{R}$ und $v = (v_1, \dots, v_n) \in N_c$ existiert eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ von $(v_1, \dots, v_{n-1})$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$, so dass

$$\{(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) \mid (x_1, \dots, x_{n-1}) \in U\} \subseteq N_c.$$

Beweis.
Zu festem $c \in \mathbb{R}$ setze $F_c : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $F_c(x) = f(x) - c$. Dann ist F stetig differenzierbar und erfüllt wegen $F_c(v) = 0$ und $\frac{\partial F_c}{\partial x_n}(v) = \frac{\partial f}{\partial x_n}(v) \neq 0$ für alle $v \in N_c$ die Voraussetzungen des Satzes über implizite Funktionen. Dieser liefert zu jedem $v = (v_1, \dots, v_n) \in N_c$ eine offene Umgebung $U \subseteq \mathbb{R}^{n-1}$ von $(v_1, \dots, v_{n-1})$ und eine stetig differenzierbare Funktion $h : U \to \mathbb{R}$ mit $F_c(x_1, \dots, x_{n-1}, h(x_1, \dots, x_{n-1})) = 0$ für alle $(x_1, \dots, x_{n-1}) \in U$. Mit der Definition von F_c folgt dann die Behauptung. □

4. Aufgabe (8 Punkte)

Zeige *explizit*, dass der Vektorraum

$$C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig}, \lim_{|x| \to \infty} f(x) = 0\}$$

bzgl. der Norm $\|\cdot\|_\infty$ vollständig ist.

Beweis.
Zeige also, dass jede Cauchyfolge in $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ konvergiert.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, d. h. es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Wegen $\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(x) - f_m(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Da $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist, konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. es existiert ein $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) := \lim_{n\to\infty} f_n(x)$, so dass $|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ fest und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N$$

und ein $m_0 \geq N$ mit

$$|f_{m_0}(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folglich gilt für alle $n \geq N$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq |f_n(x_0) - f_{m_0}(x_0)| + |f_{m_0}(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war und N nicht von x_0 abhängt, gilt für alle $n \geq N$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| \leq \varepsilon$$

und somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen f.

Zeige nun noch, dass $f \in C_0(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
Da $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f und liefert mit der Stetigkeit von f_n auch die Stetigkeit von f. Weiterhin gibt es zu jedem $\varepsilon > 0$ wegen $\|f(x) - f_n(x)\|_\infty \xrightarrow{n\to\infty} 0$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $|f(x) - f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und wegen $\lim_{|x|\to\infty} f_{n_0}(x) = 0$ ein $a_{n_0} \in \mathbb{R}$ mit $|f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$ für $|x| > a_{n_0}$. Folglich gilt

$$|f(x)| \leq |f(x) - f_{n_0}(x)| + |f_{n_0}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \quad \text{für } |x| > a_{n_0}$$

und daher $\lim_{|x|\to\infty} f(x) = 0$. □

5. Aufgabe (9 Punkte)

a) Seien $F : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m$, $K > 0$ und $a > 1$ mit

$$\|F(x)\| \leq K\|x\|^a \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^n.$$

Zeige, dass F im Nullpunkt differenzierbar ist mit $DF(0) = 0$.

b) Sei $\alpha > 0$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} |x|^\alpha |y|^\alpha & \text{für } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{für } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Bestimme jeweils $\alpha > 0$, so dass f im Nullpunkt stetig bzw. partiell differenzierbar bzw. differenzierbar ist und beweise deine Behauptung .

Beweis.

a) Da $\|F(0)\| \leq K\|0\|^a = 0$ und somit $F(0) = 0$, gilt für alle $a > 1$

$$\frac{\|F(x-0) - F(0) - DF(0)(x-0)\|}{\|x-0\|} = \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} \leq K\|x\|^{a-1} \xrightarrow{x\to 0} 0$$

und folglich ist F in der Tat in $0 \in \mathbb{R}^n$ differenzierbar.

b) Wegen

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 = f(0,0)$$

ist f für alle $\alpha > 0$ stetig in $(0,0)$.
Ausserdem existieren für alle $\alpha > 0$ die partiellen Ableitungen in $(0,0)$ wegen

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(t,0) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0$$
$$\frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(0,t) - f(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{0}{t} = 0.$$

Da $|f(x,y)| \leq \|(x,y)\|^{2\alpha}$ ist f nach (a) differenzierbar in $(0,0)$ wenn $\alpha > \frac{1}{2}$.
Wäre f auch für $\alpha \leq \frac{1}{2}$ differenzierbar in $(0,0)$, so müsste dort jede Richtungsableitung existieren, also für alle $(v_1, v_2) \in \mathbb{R}^2 \setminus (0,0)$

$$D_{(v_1,v_2)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{f(tv_1, tv_2)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{t^{2\alpha}|v_1|^\alpha |v_1|^\alpha}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{|v_1|^\alpha |v_1|^\alpha}{t^{1-2\alpha}}.$$

Da z.B. für $(v_1, v_2) = \frac{1}{\sqrt{2}}(1,1)$ der Grenzwert

$$D_{(v_1,v_2)} f(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{2^\alpha t^{1-2\alpha}}$$

nicht existiert, ist f für kein $\alpha \leq \frac{1}{2}$ differenzierbar in $(0,0)$.

$\square$

6. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für alle $n \geq 1$ und $x \in \mathbb{R}$ gegeben durch $f_n(x) = e^{-nx^2}$. Zeige, dass dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Beweis.

Da f_n für alle $n \geq 1$ auf jedem Intervall $[a, \infty)$, $a > 0$ monoton fallend ist, gilt somit

$$\sup_{x\in[a,\infty)} |e^{-nx^2}| = e^{-na^2} \xrightarrow{n\to\infty} 0.$$

Daher konvergiert die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ auf jedem Intervall $[a, \infty)$, $a > 0$ gleichmässig gegen die konstante Nullfunktion. Weiterhin wird $(f_n)_{n>1}$ dominiert durch $|e^{-nx^2}| \leq e^{-x^2}$, wobei für alle $a \in \mathbb{R}$ das Integral $\int_a^\infty e^{-x^2}\,\mathrm{d}x$ existiert. Folglich existiert $\int_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x$ auf jedem Intervall $[a, \infty)$, $a > 0$ und es können Integration und Grenzübergang vertauscht werden, d. h.

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty \lim_{n\to\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^\infty 0\,\mathrm{d}x = 0 \quad \forall\, a > 0.$$

Da dieses für beliebig kleine $a > 0$ gilt, erhalten wir für jede Nullfolge $(a_m)_{m\in\mathbb{N}} \subseteq \mathbb{R}_+$ einerseits

$$\left| \int_{a_m}^\infty f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \xrightarrow{n\to\infty} 0$$

und andererseits für alle $n \geq 1$

$$\left| \int_0^{a_m} f_n(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq a_m \cdot \underbrace{\sup_{x\in[0,a_m]} f_n(x)}_{=f_n(0)=1} = a_m \xrightarrow{m\to\infty} 0.$$

$\square$

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)