Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

Sommersemester 2008

Lösungsskizze zur Analysis II - Nachklausur vom 30.09.08

---

1. Aufgabe (7 Punkte)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $f: X \to Y$ eine Abbildung. Zeige:

a) Ist f differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in X$, so ist f eine konstante Abbildung.
Hinweis: Mittelwertsatz

b) f ist genau dann eine konstante Abbildung, wenn es ein $\alpha > 1$ und ein $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X^\alpha \quad \forall\, x,\, y \in X.$$

Beweis.

a) Da X als Banachraum auch konvex ist, kann der Mittelwertsatz in Integralform angewendet werden. Es gilt also für alle $x, y \in X$:

$$f(x) - f(y) = (y - x) \int_0^1 \underbrace{f'(x + t(y - x))}_{=0} \,\mathrm{d}t = 0.$$

Folglich erhalten wir $f(x) = f(y)$ für alle $x, y \in X$, also ist f konstant.

b) $\Rightarrow$: Ist f konstant, so gilt für alle $x, y \in X$ und für alle $\alpha > 1$ und $C \geq 0$ stets

$$\|f(x) - f(y)\|_Y = 0 \leq C\|x - y\|_X^\alpha.$$

$\Leftarrow$: Wir zeigen nun mit Hilfe von a), dass f konstant ist, d. h. es ist zu zeigen, dass $(Df)(x) = f'(x) = 0$ für alle $x \in X$. Da die Ableitung eindeutig ist, genügt es zu zeigen, dass für alle $x_0 \in X$ mit $Df = 0$ gilt:

$$\frac{\|f(x) - f(x_0) - Df(x - x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} \xrightarrow{x \to x_0} 0.$$

Mittels der Voraussetzung folgt bereits

$$\frac{\|f(x) - f(x_0)\|_Y}{\|x - x_0\|_X} \leq C\|x - x_0\|_X^{\alpha - 1} \xrightarrow{x \to x_0} 0.$$

Somit ist die Ableitung eindeutig gegeben durch $Df = 0$ und nach a) ist f somit konstant.

$\square$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $I : C^0([a,b]) \to C^1([a,b])$ definiert durch

$$I(f)(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

a) Zeige, dass I stetig ist, wenn auf $C^0([a,b])$ und $C^1([a,b])$ die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ verwendet wird.

b) Zeige, dass I differenzierbar ist und bestimme $D_g I(f)$ für $f \in C^0([a,b])$, $g \in C^0([a,b])\setminus\{0\}$.

Beweis.

Zeige zunächst, dass I linear ist. Für alle $f, g \in C^0([a,b])$ und $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$ gilt:

$$I(\lambda f+\mu g)(x) = \int_a^x (\lambda f+\mu g)(t)\,\mathrm{d}t = \lambda \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t + \mu \int_a^x g(t)\,\mathrm{d}t = \lambda I(f)(x) + \mu I(g)(x) \quad \forall\, x \in [a,b].$$

a) Da I eine lineare Abbildung ist, genügt es für die Stetigkeit zu zeigen, dass I beschränkt ist, d. h. dass ein $M \geq 0$ existiert, so dass $\|I(f)\|_\infty \leq M\|f\|_\infty$ für alle $f \in C^0([a,b])$. Es gilt für alle $f \in C^0([a,b])$

$$\begin{aligned}\|I(f)\|_\infty &= \sup_{x\in[a,b]} |I(f)(x)| = \sup_{x\in[a,b]} \Bigg| \underbrace{\int_a^x f(t)dt}_{\leq (x-a)\sup_{t\in[a,x]}|f(t)|} \Bigg| \\ &\leq \sup_{x\in[a,b]} |x-a| \cdot \sup_{x\in[a,b]} \Big| \sup_{t\in[a,x]} |f(t)| \Big| \\ &= (b-a) \cdot \sup_{t\in[a,b]} |f(t)| = (b-a)\|f\|_\infty.\end{aligned}$$

Daher ist die obige Bedingung für $M := b-a$ erfüllt und die Abbildung I somit stetig.

b) Aufgrund der Linearität von I, ist I differenzierbar mit $DI = I$, da für alle $f, f_0 \in C^0([a,b])$ mit $r \equiv 0$ gilt:

$$I(f) = I(f-f_0) + I(f_0) + r(f)\|f-f_0\|_\infty.$$

Da I differenzierbar ist, existieren alle Richtungsableitungen für $g \in C^0([a,b]) \setminus \{0\}$ und es gilt:

$$D_g I(f) = DI(g) = I(g).$$

$\square$

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } x^2+y^4 \neq 0 \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige, dass g im Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar ist, aber alle Richtungsableitungen existieren.

Beweis.
Für $(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}) \xrightarrow{n\to\infty} (0,0)$ gilt

$$g\left(\frac{1}{n^2}, \frac{1}{n}\right) = \frac{\frac{1}{n^2}\left(\frac{1}{n^2}\right)^2}{\left(\frac{1}{n^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{n}\right)^4} = \frac{1}{2} \neq g(0,0) = 0.$$

Somit ist g ist im Punkt $(0,0)$ nicht stetig, also erst recht nicht differenzierbar.
Für $(x,y) \neq (0,0)$ ist g als Komposition differenzierbarer Funktionen selbst wieder differenzierbar und folglich existieren dort auch alle Richtungsableitung.
Im Punkt $(x,y) = (0,0)$ erhalten wir für alle $(u,v) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$

$$D_{(u,v)}g(0,0) = \lim_{t\to 0} \frac{g(tu,tv) - g(0,0)}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{1}{t} \frac{t^3uv^2}{t^2(u^2+t^2v^4)} = \lim_{t\to 0} \frac{uv^2}{(u^2+t^2v^4)} = \frac{v^2}{u}.$$

Somit existieren auch alle Richtungsableitungen in $(0,0)$. $\square$

4. Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u + \cos(uv) - vx - 1 \\ \sin u + y + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 1)$ durch differenzierbare Funktionen $u(x, y)$ und $v(x, y)$ aufgelöst werden kann.

Beweis.

Definiere eine stetig differenzierbare Funktion $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ durch

$$f(x, y, u, v) = \begin{pmatrix} u + \cos(uv) - vx - 1 \\ \sin u + y + v \end{pmatrix}.$$

Zeige nun, dass in einer Umgebung von $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 1)$ eine stetig differenzierbare Funktion $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $g(x, y) = (u(x, y), v(x, y))$ existiert, so dass $f(x, y, g(x, y)) = (0, 0)$.
Es gilt $f(0, -1, 0, 1) = (0, 0)$ und

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial(u, v)}(0, -1, 0, 1) &= \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,-1,0,1)} \\ &= \begin{pmatrix} 1 - v\sin(uv) & -u\sin(uv) - x \\ \cos u & 1 \end{pmatrix}\Bigg|_{(0,-1,0,1)} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Wegen

$$\det \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = 1 \neq 0,$$

ist $\frac{\partial f}{\partial(u,v)}(0, -1, 0, 1)$ invertierbar und der Satz über implizite Funktionen liefert folglich die Existenz der gesuchten Funktion g. $\square$

5. Aufgabe (11 Punkte)

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist $f : X \to Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt, so ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt.

b) Ist $f : X \to Y$ gleichmässig stetig, so bildet f Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen ab.

c) Hat X die Eigenschaft, dass jede Cauchyfolge in X eine konvergente Teilfolge besitzt, so ist X vollständig. Insbesondere ist X vollständig, wenn X kompakt ist.

Beweis.

a) Sei $(V_i)_{i\in I}$ eine beliebige offene Überdeckung von $f(K)$, also $f(K) \subseteq \bigcup_{i\in I} V_i$. Dann gilt

$$K \subseteq \bigcup_{i\in I} f^{-1}(V_i).$$

Da f stetig ist, sind die Urbilder $f^{-1}(V_i)$ der offenen Mengen V_i wieder offen. Somit ist $(f^{-1}(V_i))_{i\in I}$ eine offene Überdeckung von K. Da K nach Voraussetzung kompakt ist, gibt es zu dieser Überdeckung eine endliche Teilüberdeckung von K, d. h. es gibt endlich viele Indizes $i_1, \dots, i_n$, so dass

$$K \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} f^{-1}(V_{i_k}).$$

Folglich gilt dann auch

$$f(K) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} V_{i_k}$$

und wir haben eine endliche Teilüberdeckung von $f(K)$. Also ist $f(K)$ kompakt.

b) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Cauchyfolge. Zeige, dass auch $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}} \subseteq Y$ eine Cauchyfolge ist. Sei $\varepsilon > 0$. Da f gleichmässig stetig ist, existiert ein $\delta > 0$ mit

$$\forall\, x, y \in X : \quad d_X(x, y) < \delta \quad \Longrightarrow \quad d_Y(f(x), f(y)) < \varepsilon.$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq X$ eine Cauchyfolge ist, existiert zu diesem $\delta > 0$ ein $N \in \mathbb{N}$, so dass

$$d_X(x_n, x_m) < \delta \quad \forall\, n, m \geq N.$$

Folglich erhalten wir $d_Y(f(x_n), f(x_m)) < \varepsilon$ für alle $n, m \geq N$.

c) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in X. Dann gilt

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, n_0 \in \mathbb{N} : \quad d(x_n, x_m) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, n, m \geq n_0. \tag{*}$$

Da $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ nach Voraussetzung eine konvergente Teilfolge besitzt, existiert ein $x \in X$ mit

$$\forall\, \varepsilon > 0\ \exists\, k_0 \in \mathbb{N} : \quad d(x_{n_k}, x) < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall\, k \geq k_0. \tag{**}$$

Sei $\varepsilon > 0$ und wähle $N = \max\{n_{k_0}, n_0\}$. Dann gilt mit Hilfe der Dreiecksungleichung:

$$d(x_n, x) \leq \underbrace{d(x_n, x_{n_k})}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ nach } (*)} + \underbrace{d(x_{n_k}, x)}_{<\frac{\varepsilon}{2} \text{ nach } (**)} < \varepsilon \quad \forall\, n \geq N.$$

Also konvergiert die Cauchyfolge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $x \in X$.
Ist X (folgen-)kompakt, besitzt jede Folge (also insbesondere jede Cauchyfolge) in X eine konvergente Teilfolge. Mit der oben bewiesenen Aussage, konvergiert also jede Cauchyfolge und X ist somit vollständig.

$\square$

6. Aufgabe (8 Punkte)

Zeige, dass der Vektorraum

$$C_{b,0}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}, f(0) = 0\}$$

bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ vollständig ist.

Beweis.
Zeige also, dass jede Cauchyfolge in $(C_{b,0}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ konvergiert.
Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(C_{b,0}(\mathbb{R},\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$, d. h. es gelte

$$\forall \varepsilon > 0 \, \exists N \in \mathbb{N} \quad \|f_n - f_m\|_\infty < \varepsilon \quad \forall n, m \geq N.$$

Wegen $\|f_n - f_m\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f_m(x)| \geq |f_n(x) - f_m(x)|$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ eine Cauchyfolge in $(\mathbb{R}, |\cdot|)$. Da $(\mathbb{R}, |\cdot|)$ vollständig ist, konvergiert $(f_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ für alle $x \in \mathbb{R}$, d. h. es existiert ein $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, so dass $|f_n(x) - f(x)| \xrightarrow{n\to\infty} 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
Sei nun $x_0 \in \mathbb{R}$ fest und $\varepsilon > 0$. Dann existiert ein $N \in \mathbb{N}$ mit

$$|f_n(x_0) - f_m(x_0)| \leq \|f_n - f_m\|_\infty < \frac{\varepsilon}{2} \quad \forall n, m \geq N$$

und ein $p \geq N$ mit

$$|f_p(x_0) - f(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Folglich gilt für alle $n \geq N$

$$|f_n(x_0) - f(x_0)| \leq |f_n(x_0) - f_p(x_0)| + |f_p(x_0) - f(x_0)| < \varepsilon.$$

Da $x_0 \in \mathbb{R}$ beliebig war und N nicht von x_0 abhängt, gilt für alle $n \geq N$

$$\|f_n - f\|_\infty = \sup_{x\in\mathbb{R}} |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

und somit konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ gegen f.
Zeige nun noch, dass $f \in C_{b,0}(\mathbb{R})$.
Da $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\|_\infty = 0$, konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmässig gegen f und liefert mit der Stetigkeit von f_n auch die Stetigkeit von f. Wegen $f_n(0) = 0$ gilt mit der punktweisen Konvergenz auch

$$f(0) = \lim_{n\to\infty} f_n(0) = 0.$$

Da f_n für jedes $n \in \mathbb{N}$ beschränkt ist, existiert für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $M_n \geq 0$ mit $\|f_n\|_\infty \leq M_n$. Ausserdem existiert für $\varepsilon = 1$ ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$\|f\|_\infty \leq \|f - f_{n_0}\|_\infty + \|f_{n_0}\|_\infty < 1 + M_{n_0} < \infty.$$

Somit ist auch f beschränkt und daher gilt $f \in C_{b,0}(\mathbb{R})$. □