Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

Sommersemester 2008

Nachklausur zur VL Analysis II

30.09.2008

Name: .... Vorname: ....

Matr.–Nr.: .... Studiengang: ....

Gebt bei allen Antworten eine Begründung bzw. einen Beweis an. Die Klausur ist mit 21 Punkten bestanden. Ihr habt 120 Minuten Zeit.

Viel Erfolg!

Hiermit erkläre ich mich mit der Veröffentlichung meines Klausurergebnisses mit Matrikelnummer auf der Homepage der Veranstaltung einverstanden.

Berlin, den 30.09.2008 .... (Unterschrift)

1	2	3	4	5	6	$\sum$

1. Aufgabe (7 Punkte)

Seien $(X, \|\cdot\|_X)$, $(Y, \|\cdot\|_Y)$ Banachräume und $f : X \to Y$ eine Abbildung.
Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist f differenzierbar mit $f'(x) = 0$ für alle $x \in X$, so ist f eine konstante Abbildung.
Hinweis: Mittelwertsatz

b) f ist genau dann eine konstante Abbildung, wenn es ein $\alpha > 1$ und ein $C \geq 0$ gibt, so dass

$$\|f(x) - f(y)\|_Y \leq C\|x - y\|_X^\alpha \quad \forall\, x,\, y \in X.$$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei $I : C^0([a,b]) \to C^1([a,b])$ definiert durch

$$I(f)(x) = \int_a^x f(t)\,\mathrm{d}t, \quad x \in [a,b].$$

a) Zeige, dass I stetig ist, wenn auf $C^0([a,b])$ und $C^1([a,b])$ die Supremumsnorm $\|\cdot\|_\infty$ verwendet wird.

b) Zeige, dass I differenzierbar ist und bestimme $D_g I(f)$ für $f \in C^0([a,b])$, $g \in C^0([a,b])\setminus\{0\}$.

3. Aufgabe (5 Punkte)

Sei $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$g(x,y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2+y^4} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst} \end{cases}$$

Zeige, dass g im Punkt $(0,0)$ nicht differenzierbar ist, aber alle Richtungsableitungen existieren.

4. Aufgabe (5 Punkte)

Zeige, dass das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} u + \cos(uv) - vx - 1 \\ \sin u + y + v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

in einer Umgebung von $(x_0, y_0, u_0, v_0) = (0, -1, 0, 1)$ durch differenzierbare Funktionen $u(x,y)$ und $v(x,y)$ aufgelöst werden kann.

5. Aufgabe (11 Punkte)

Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume. Beweise die folgenden Aussagen:

a) Ist $f : X \to Y$ stetig und $K \subseteq X$ kompakt, so ist $f(K) \subseteq Y$ kompakt.

b) Ist $f : X \to Y$ gleichmäßig stetig, so bildet f Cauchy-Folgen auf Cauchy-Folgen ab.

c) Hat X die Eigenschaft, dass jede Cauchyfolge in X eine konvergente Teilfolge besitzt, so ist X vollständig. Insbesondere ist X vollständig, wenn X kompakt ist.

6. Aufgabe (8 Punkte)

Zeige, dass der Vektorraum

$$C_{b,0}(\mathbb{R}) := \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \mid f \text{ stetig und beschränkt}, f(0) = 0\}$$

bzgl. $\|\cdot\|_\infty$ vollständig ist.

(Gesamtpunktzahl: 42 Punkte)