Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

Sommersemester 2008

2. Übungsblatt zur VL Analysis II

Riemannsche Summen, Riemann-Integral

Abgabe: 05.05.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe

Zeige, dass für a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, gilt:

$$\int_a^b e^{\gamma x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\gamma}\left(e^{\gamma b} - e^{\gamma a}\right) \quad \forall\, \gamma \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Benutze hierzu Riemannsche Summenfolgen mit äquidistanter Zerlegung.

2. Aufgabe

Sei $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ für alle $x \in [0,1]$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{q} & \text{für } x = \frac{p}{q} \text{ mit teilerfremden } p,\ q \in \mathbb{N},\ q \geq 1. \end{cases}$$

Zeige, dass f Riemann-integrierbar ist mit

$$\int_0^1 f(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

3. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine über jedes Intervall $[0,t]$, $t > 0$, Riemann-integrierbare Funktion mit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \mu.$$

Zeige, dass dann

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x)\,\mathrm{d}x = \mu.$$

Bemerkung: Verwende bereits

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \int_a^c f(x)\,\mathrm{d}x + \int_c^b f(x)\,\mathrm{d}x \quad \forall\, a < c < b.$$

Hausaufgaben

1. Aufgabe (14 Punkte)

Berechne für a, $b \in \mathbb{R}$, $a < b$, die Riemann-Integrale

$$\int_a^b \sin x \,\mathrm{d}x \quad \text{und} \quad \int_a^b \cos x \,\mathrm{d}x$$

a.) mithilfe des Ergebnisses aus der 1. Übungsaufgabe.

b.) mithilfe von Riemannschen Summenfolgen und äquidistanter Zerlegung.
Hinweis: $\sin x = 1/2i(e^{ix} - e^{-ix})$, $\cos x = 1/2(e^{ix} + e^{-ix})$.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Berechne das Integral

$$\int_1^a \ln x \,\mathrm{d}x, \quad a > 1$$

unter Verwendung von Riemannschen Summenfolgen. Wähle hierzu die Zerlegung

$$1 = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = a, \text{ wobei } x_k = a^{\frac{k}{n}} \text{ für } k = 0, \ldots, n.$$

3. Aufgabe (10 Punkte)

Zeige mithilfe Riemannscher Summenfolgen:
Sei $a > 0$ beliebig. Ist $f : [-a, a] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar und gilt $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in [-a, a]$, so ist

$$\int_{-a}^a f(x) \,\mathrm{d}x = 0.$$

Bestimme damit $\int_0^{2\pi} \sin x \,\mathrm{d}x$.

4. Aufgabe (6 Punkte)

Beweise mit den Mitteln aus der VL die folgende Abschätzung:

$$0 \leq \int_0^1 x^{39} \sin^8 x \,\mathrm{d}x \leq \frac{1}{40}.$$

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)