Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

Sommersemester 2008

3. Übungsblatt zur VL Analysis II

Riemann-Integration, Integrationsregeln

Abgabe: 13.05.2008 **vor Beginn** der Vorlesung

Hinweise zur Bearbeitung der Übungsblätter

Achtet darauf, in euren Beweisen jeden Schritt ordentlich zu begründen, da es ansonsten dafür keine Punkte in den Hausaufgaben geben kann!

Analysis 2 - Umtrunk

Wir finden, dass ihr euch nach der harten Arbeit im ersten Viertel des Semesters etwas Entspannung verdient habt. Darum haben wir für euch einen Umtrunk organisiert. Er findet statt am

14. Mai 2008 ab 18 Uhr im Mathe-Café (MA 844).

Getränke sind prinzipiell selbst mitzubringen oder mit Marken vom Mathe-Café zu erstehen, wir sponsoren aber auch etwas **Freibier** in begrenzter Stückzahl.

Übung

1. Aufgabe

Sei $n \in \mathbb{N}$. Berechne die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int \ln x \, \mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int x^n e^x \, \mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int x e^{x^2} \, \mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int \frac{\mathrm{d}x}{x(x+1)^3}$$

2. Aufgabe

Bestimme eine Rekursionsformel für das Integral $\int \sin^n x \, \mathrm{d}x$, $n \geq 2$.

3. Aufgabe (Riemannsches Lemma)

Sei $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Für $k \in \mathbb{R}$ sei

$$F(k) = \int_a^b f(x) \sin kx \, \mathrm{d}x.$$

Zeige, dass dann $\lim_{|k| \to +\infty} F(k) = 0$ gilt.

4. Aufgabe

Berechne für a, b, $c \in \mathbb{R}$ mit $a \neq 0$ das unbestimmte Integral

$$\int \frac{\mathrm{d}x}{ax^2 + bx + c}$$

und gebe den Definitionsbereich in Abhängigkeit von a, b, c an.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (12 Punkte)

Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $n \in \mathbb{N}$. Berechne die folgenden Integrale:

$$\text{a)} \int x^n \cos x \, \mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int x^2 e^{\lambda x} \, \mathrm{d}x \qquad \text{c)} \int_1^e x^2 \ln(x^2) \, \mathrm{d}x \qquad \text{d)} \int \frac{\mathrm{d}x}{1+e^x}$$

$$\text{e)} \int \frac{x+1}{x^3 - 2x^2 + x} \, \mathrm{d}x \qquad \text{f)} \int_{-\ln 2}^{\ln 2} \sqrt{1+x^2} \, \mathrm{d}x$$

Hinweis: Substitution bei f) durch $x = \sinh t$

2. Aufgabe (6 Punkte)

Sei f eine über jedes Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbare Funktion. Zeige mithilfe Riemannscher Summenfolgen, dass dann für alle $a, b, c \in \mathbb{R}$ gilt:

$$\text{a)} \int_a^b f(x) \, \mathrm{d}x = \int_{-b}^{-a} f(-x) \, \mathrm{d}x \qquad \text{b)} \int_a^b f(x+c) \, \mathrm{d}x = \int_{a+c}^{b+c} f(x) \, \mathrm{d}x$$

$$\text{c)} \int_{ca}^{cb} f(x) \, \mathrm{d}x = c \int_a^b f(cx) \, \mathrm{d}x$$

3. Aufgabe (14 Punkte)

Beweise die folgenden Aussagen:

a) Die Heaviside-Funktion H aus der VL ist auf jedem Intervall $I \subseteq \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, besitzt aber auf $I = [-1, 1]$ keine Stammfunktion.

b) Seien f, $g : [0,1] \to \mathbb{R}$ stetige Funktionen. Zeige, dass ein $\xi \in (0,1)$ existiert mit

$$\int_0^1 f(x) \, \mathrm{d}x \cdot \int_0^1 g(x) \, \mathrm{d}x = g(\xi) \int_0^\xi f(x) \, \mathrm{d}x + f(\xi) \int_0^\xi g(x) \, \mathrm{d}x.$$

Hinweis: Betrachte $F \cdot G$ für geeignete Stammfunktionen F und G von f bzw. g

c) Sei $f : [-1, 1] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion. Dann gilt:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\cos x) \, \mathrm{d}x = \int_0^{\frac{\pi}{2}} f(\sin x) \, \mathrm{d}x.$$

4. Aufgabe (8 Punkte)

Seien f und g über jedes Intervall $[0, t]$, $t > 0$, Riemann-integrierbare Funktionen mit

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \mu \quad \text{und} \quad \lim_{x \to +\infty} g(x) = \eta.$$

Zeige, dass dann

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{t} \int_0^t f(x) g(t-x) \, \mathrm{d}x = \mu\eta.$$

Hinweis: $f(x)g(t-x) = (f(x) - \mu)g(t-x) + \mu g(t-x)$

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)