Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2008
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

4. Übungsblatt zur VL Analysis II

uneigentliche Integrale, Metriken
Abgabe: 19.05.2008 **vor Beginn** der Übung

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)
Untersuche, ob die folgenden uneigentlichen Integrale auf ihre Existenz

a) $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{x^2}e^{-\frac{1}{x}}\,\mathrm{d}x$ b) $\displaystyle\int_{-1}^{\infty} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x$ c) $\displaystyle\int_0^1 x\ln x\,\mathrm{d}x$ d) $\displaystyle\int_2^{\infty} \frac{1}{\sqrt{x}(1-x)}\,\mathrm{d}x$

und zeige, dass

e) $$\int_0^{\infty} x^n e^{-x}\,\mathrm{d}x = n! \quad \forall n \in \mathbb{N}_0.$$

2. Aufgabe (8 Punkte)
Sei $f_n : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$, $n \in \mathbb{N}$, für alle $x \in \mathbb{R}_+$ definiert durch

$$f_n(x) = \frac{x}{n^2}e^{-\frac{x}{n}}.$$

Zeige anhand dieser Funktionenfolge, dass gleichmäßige Konvergenz nicht genügt um Grenzübergänge und uneigentliche Integration zu vertauschen. D. h. also, zeige, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zwar gleichmäßig gegen 0 konvergiert, aber

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\infty} f_n(x)\,\mathrm{d}x = 1.$$

3. Aufgabe (Eulersche Beta-Funktion) (12 Punkte)

a) Zeige, dass das uneigentliche Integral

$$B(x,y) = \int_0^1 t^{x-1}(1-t)^{y-1}\,\mathrm{d}t$$

für alle x, $y \in \mathbb{R}_+ \setminus \{0\}$ konvergiert.

b) Zeige, dass für alle $m \in \mathbb{N}_0$ gilt:

$$\int_{-1}^{1} \frac{x^{2m}}{\sqrt{1-x^2}}\,\mathrm{d}x = B(m+\frac{1}{2},\frac{1}{2}).$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

Welche der folgenden Abbildungen $d : X \times X \to \mathbb{R}$ definiert eine Metrik auf X? Beweist eure Antwort!

a) $X = \mathbb{R}$, $d(x, y) := e^{x-y} - 1$

b) $X = \mathbb{N}$, $d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = y, \\ 1 + \frac{1}{x+y} & \text{falls } x \neq y \end{cases}$

c) $X = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$, $d(x, y) := |S(x) - S(y)|$, wobei

$$S : X \to \mathbb{R},\ S(x) = \begin{cases} -1 & \text{falls } x = -\infty, \\ \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} & \text{falls } x \in \mathbb{R}, \\ 1 & \text{falls } x = +\infty \end{cases}$$

d) $X = \mathbb{R}^2$, $d(x, y) = \sin(d^2(x, y))$, wobei d^2 die Standardmetrik auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

Zusatzaufgabe (8 Zusatzpunkte)

Sei X eine Menge und $d : X \times X \to [0, \infty)$ definiert durch

$$d(x,y) := \begin{cases} 0 & \text{für } x = y, \\ 1 & \text{für } x \neq y. \end{cases}$$

Zeige, dass (X, d) ein metrischer Raum ist und dass jede Teilmenge von X sowohl offen als auch abgeschlossen ist.

(Gesamtpunktzahl: 40+8 Punkte)