Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski

Sommersemester 2008

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

# 6. Übungsblatt zur VL Analysis II

Fixpunktsatz, Kompaktheit

Abgabe: 02.06.2008 **vor Beginn** der Übung

---

Dies ist das letzte Übungsblatt der ersten Semesterhälfte!

---

## Übung

**1. Aufgabe**

a) Zeige, dass im Banachschen Fixpunktsatz die Voraussetzung

$$f : X \to X \quad \text{ist kontrahierend} \tag{*}$$

abgeschwächt und ersetzt werden kann durch die Bedingung

$$\exists m \in \mathbb{N} : \quad f^m = \underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{m-mal} : X \to X \quad \text{ist kontrahierend.}$$

b) Zeige weiterhin anhand eines Beispiels, dass der Banachsche Fixpunktsatz i.A. nicht mehr gilt, wenn (*) ersetzt wird durch

$$d(f(x), f(y)) < d(x, y) \quad \forall x, y \in X.$$

**2. Aufgabe**

Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $(x_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge in $X$, die gegen ein $a \in X$ konvergiere. Zeige, dass dann die Menge

$$A = \{x_n \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{a\}$$

kompakt ist.

Gib weiterhin ein Beispiel dafür an, dass dies nicht mehr gilt, wenn man aus $A$ den Grenzwert der Folge weglässt.

**3. Aufgabe**

Seien $A_1, \ldots, A_n$ kompakte Teilmengen eines metrischen Raumes $(X, d)$.

Zeige, dass dann auch die Mengen

$$\bigcup_{k=1}^{n} A_k \qquad \text{und} \qquad \bigcap_{k=1}^{n} A_k$$

kompakt sind.

**4. Aufgabe**
Seien $K$ und $L$ kompakte Teilmengen des $\mathbb{R}^n$.
Zeige, dass dann auch $K + L := \{k + l \in \mathbb{R}^n \mid k \in K,\ l \in L\}$ kompakt ist.

# Hausaufgaben

**1. Aufgabe** (10 Punkte)
Betrachte die 3. Übungsaufgabe vom 5. ÜB. Untersuche die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}_0}$, definiert durch

$$f_n : [0,1] \to \mathbb{R}, \quad f_n(x) = x^n$$

auf Konvergenz bzgl. $d$ und $d^{sup}$.

**2. Aufgabe** (8 Punkte)
Sei $(X, d)$ ein vollständiger, nicht-leerer, beschränkter metrischer Raum und $f : X \to X$ eine kontrahierende Abbildung. Betrachte die rekursiv definierte Mengenfolge

$$X_0 = X, \quad X_{k+1} = f(X_k) \quad k \in \mathbb{N}.$$

Zeige, dass der Durchschnitt dieser Mengenfolge aus genau einem Punkt besteht und gib dabei eine Abschätzung für den Durchmesser von $X_k$ an.

**3. Aufgabe** (12 Punkte)
Sei $\varepsilon \in ]0, \frac{1}{2}[$ beliebig, aber fest. Kann man aus der gegebenen offenen Überdeckung der Menge $A_i \subset \mathbb{R}$ eine endliche Teilüberdeckung auswählen? Ist $A_i$ kompakt? Beweist eure Entscheidung.

a) $A_1 = \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\}$ mit Überdeckung $(\,]\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}[\,)_{n\in\mathbb{N}}$,

b) $A_2 = \{\frac{1}{2^n} \mid n \in \mathbb{N}_0\} \cup \{0\}$ mit Überdeckung $(\,]\frac{1-\varepsilon}{2^n}, \frac{1+\varepsilon}{2^n}[\,)_{n\in\mathbb{N}_0} \cup ]-\varepsilon, \varepsilon[$,

c) $A_3 = ]0, 1[$ mit Überdeckung $(\,]-\delta, 1+\delta[\,)_{\delta\in]0,1[}$.

**4. Aufgabe** (10 Punkte)
Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum. Entscheide, ob die folgenden Aussagen wahr oder falsch sind. Beweist eure Antwort.

a) Sei $M \subset X$ eine endliche Menge (d.h. $M$ enthält nur endlich viele Elemente). Dann ist $M$ kompakt.

b) Jede Überdeckung einer kompakten Teilmenge $K \subset X$ mit abgeschlossenen Mengen enthält eine endliche Teilüberdeckung.

**Zusatzaufgabe** (20 Punkte)

a) Sei $(X, d)$ ein metrischer Raum und $A \subset X$. Zeige, dass $A$ genau dann kompakt in $(X, d)$ ist, wenn $A$ in $(A, d_A)$ kompakt ist.
Kann man in diesem Satz „kompakt“ durch „abgeschlossen“ ersetzen?

b) Betrachte Hausaufgabe 3 b) vom 5. ÜB. Gebt ein Beispiel einer Menge an, die beschränkt und abgeschlossen in $(\mathbb{R}, d)$ ist, aber nicht kompakt. Beweist eure Behauptung.

(Gesamtpunktzahl: 40+20 Punkte)