Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2008
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

7. Übungsblatt zur VL Analysis II

Kompaktheit, Zusammenhang, Stetigkeit

Abgabe: 09.06.2008 **vor Beginn** der Übung

Analysis 2 - Umtrunk - die Zweite

Zur Semesterhälfte wollen wir noch einmal zu einem gemütlichen Umtrunk zusammen kommen. Er findet statt am

Freitag, den 13. Juni ab 18 Uhr im Mathe-Café (MA 844).

Wie schon beim letzten Mal sind Getränke prinzipiell selbst mitzubringen oder mit Marken vom Mathe-Café zu erstehen. Da an dem Tag zwei EM-Spiele laufen, werden wir uns auch um einen Fernseher bemühen, damit wir die Spiele dann gemeinsam schauen können.

Übung

1. Aufgabe
Sei (X, d) ein metrischer Raum und $M \subseteq \mathbb{R}^N$. Untersuche den Stetigkeitsbegriff für Abbildungen

$$f : (X, d) \to (\mathbb{R}^N, d_2) \quad \text{und} \quad f : (M, d_M) \to (X, d).$$

2. Aufgabe
Sei (X, d) ein metrischer Raum. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

a) X ist zusammenhängend.

b) Für alle Teilmengen $\emptyset \neq A \subsetneq X$ gilt: $\partial A \neq \emptyset$.

c) X kann nicht als Vereinigung zweier nicht-leerer disjunkter offener Mengen O_1, O_2 geschrieben werden, d.h. $X \neq O_1 \cup O_2$.

Die Implikation a) $\Rightarrow$ b) wurde bereits in der VL bewiesen. Zeige nun noch b) $\Rightarrow$ c) $\Rightarrow$ a).

3. Aufgabe
Begründe, warum der Raum $(C([a, b]), d_\infty)$ separabel ist.
Zeige weiterhin, dass der Folgenraum $l^\infty(\mathbb{N}) = \{(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid x_n \in \mathbb{R}, \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n| < \infty\}$ bzgl. der Metrik

$$d_\infty((x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}}) = \sup_{n\in\mathbb{N}} |x_n - y_n| \quad \text{für } (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in l^\infty(\mathbb{N})$$

<u>nicht</u> separabel ist.

4. Aufgabe

Beweise die folgenden Behauptungen:

a) Die Oberfläche der Einheitskugel $S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid d_2(x,0) = 1\}$ ist für alle $n \geq 1$ zusammenhängend und kompakt in $\mathbb{R}^{n+1}$.

b) Sei $T\colon S^2 \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung. Dann nimmt T Maximum und Minimum annimmt und es gibt einen Punkt $x_0 \in S^2$ mit $T(x_0) = T(-x_0)$.
(Folgerung: Bei jeder stetigen Temperaturverteilung auf der Erdoberfläche gibt es einen wärmsten und einen kältesten Punkt, und zwei sich gegenüberliegende Punkte mit gleicher Temperatur.)

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)

Sei (X, d_X) ein zusammenhängender metrischer Raum. Beweise die folgenden Behauptungen:

a) Sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion ohne Nullstellen. Existiert ein $x_0 \in X$ mit $f(x_0) > 0$, so gilt $f(x) > 0$ für alle $x \in X$.

b) Sei (Y, d_Y) ein metrischer Raum, wobei d_Y die diskrete Metrik sei. Dann ist $f : X \to Y$ genau dann stetig, wenn f konstant ist.

2. Aufgabe (10 Punkte)

Beweise die folgenden Behauptungen:

a) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige und bijektive Abbildung. Dann ist auch f^{-1} stetig.

b) Zeige anhand eines Beispiels, dass die Aussage in a) nicht für Abbildungen zwischen beliebigen metrischen Räumen gilt.

c) Seien (X, d_X), (Y, d_Y) metrische Räume und $f\colon X \to Y$ eine stetige, bijektive Abbildung. Ist X kompakt, so ist die Umkehrfunktion f^{-1} stetig.

3. Aufgabe (10 Punkte)

Sei (X, d_X) ein metrischer Raum und $(Y, \| \|_Y)$ ein Banachraum. Zeige, dass dann auch der Vektorraum $C_b(X, Y)$ vollständig ist bzgl. der Norm

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in X} \|f(x)\|_Y \quad \text{für } f \in C_b(X, Y).$$

4. Aufgabe (10 Punkte)

Sei (X, d) ein metrischer Raum und sei $f : X \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit den folgenden beiden Eigenschaften:

a) f ist nach unten beschränkt, d.h. es gibt ein $C \in \mathbb{R}$ mit $f(x) \geq C$ für alle $x \in X$.

b) Für alle kompakten Mengen $K \subset \mathbb{R}$ ist $f^{-1}(K) \subset X$ kompakt.

Zeige, dass die Funktion f ihr Minimum annimmt.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)