Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

Sommersemester 2008

# 8. Übungsblatt zur VL Analysis II

Lineare Abbildungen, Differentiation

Abgabe: 16.06.2008 **vor Beginn** der Übung

---

## Übung

**1. Aufgabe**

Sei $X$ ein endlich-dimensionaler Vektorraum mit zwei Normen $\|\cdot\|_1$, $\|\cdot\|_2$. Beweise die folgenden Aussagen:

a) („In einem endlich-dimensionalen Vektorraum sind je zwei Normen äquivalent.“)
Es gibt Konstanten $c$, $d > 0$, so dass für alle $x \in X$ gilt

$$c\,\|x\|_1 \leq \|x\|_2 \leq d\,\|x\|_1.$$

b) Eine Menge $U \subseteq X$ ist genau dann offen bzgl. $\|\cdot\|_1$, wenn sie bzgl. $\|\cdot\|_2$ offen ist.

**2. Aufgabe**

Beweise die folgenden Behauptungen:

a) Die Ableitung ist eine lineare Abbildung von $C^1([0,1])$ nach $C^0([0,1])$, die nicht stetig ist, wenn man beide Vektorräume mit der Supremumsnorm $\|\cdot\|_{\sup}$ versieht.

b) Verwendet man allerdings auf $C^1([0,1])$ die Norm $\|f\| = \|f\|_{\sup} + \|f'\|_{\sup}$, so wird die Ableitung eine stetige Abbildung von $C^1([0,1])$ nach $C^0([0,1])$.

c) Eine Konsequenz von b) ist, dass die Normen $\|\cdot\|$ und $\|\cdot\|_{\sup}$ auf $C^1([0,1])$ nicht äquivalent sind. Wie passt diese Aussage zu der in der 1. Übungsaufgabe bewiesenen Aussage?

**3. Aufgabe**

Zeige, dass die folgenden Abbildungen differenzierbar sind und gib ihre Ableitung an.

a) Betrachte $f : H \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \langle x, x\rangle$, wobei $H$ ein reeller Hilbertraum sei, d. h. ein reeller Vektorraum, versehen mit einem Skalarprodukt $\langle\cdot,\cdot\rangle$, der bzgl. der induzierten Norm $\|x\| = \sqrt{\langle x, x\rangle}$ vollständig ist.

b) Betrachte die Abbildung der Skalarmultiplikation $\mu : \mathbb{R} \times X \to X$, $(\lambda, x) \mapsto \lambda x$, wobei $(X, \|\cdot\|_X)$ ein Banachraum sei und $\mathbb{R} \times X$ versehen sei mit der Norm

$$\|(\lambda, x)\|_{\mathbb{R}\times X} = |\lambda| + \|x\|_X \quad \text{für alle } (\lambda, x) \in \mathbb{R} \times X.$$

# Hausaufgaben

**1. Aufgabe** (14 Punkte)

Seien $X$, $Y$, $Z$ normierte Vektorräume. Beweise die folgenden Behauptungen:

a) Ist $X$ endlich-dimensional und $Y$ vollständig, so ist $L(X,Y)$ mit der Operatornorm ein Banachraum.

b) Ist $T \in L(X,Y)$ und $S \in L(Y,Z)$, so ist $S \circ T \in L(X,Z)$ und es gilt $\|S \circ T\| \leq \|S\|\|T\|$.

c) (Heisenbergsche Unschärferelation)
Sind $S$, $T : X \to X$ lineare Abbildungen mit $ST - TS = \mathrm{Id}_X$, so gilt für alle $n \in \mathbb{N}_0$

$$ST^{n+1} - T^{n+1}S = (n+1)T^n.$$

Folgere daraus, dass nicht beide Abbildungen gleichzeitig stetig sein können.

**2. Aufgabe** (12 Punkte)

Sei $W = \{(a\cos + b\sin)|_{[0,2\pi]} \mid a, b \in \mathbb{R}\} \subseteq C^1([0,2\pi])$ versehen mit der Norm

$$\|f\| = \sqrt{\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} (f(x))^2 dx} \quad \text{für } f \in W.$$

a) Zeige, dass die Abbildung $\Phi\colon W \to \mathbb{R}^2$, $(a\cos + b\sin)|_{[0,2\pi]} \mapsto (a,b)$ ein Isomorphismus ist und dass $\|\Phi(f)\|_2 = \|f\|$ für alle $f \in W$ gilt, wobei $\|\cdot\|_2$ die Standardnorm auf $\mathbb{R}^2$ bezeichnet.

b) Zeige, dass die Ableitung $A\colon W \to W$, $f \mapsto f'$ eine stetige lineare Abbildung ist und dass für alle $a$, $b \in \mathbb{R}$ gilt

$$\Phi \circ A \circ \Phi^{-1}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}.$$

c) Zeige einmal direkt und einmal mit Hilfe von Teil b), dass $A^4 = A \circ A \circ A \circ A = \mathrm{Id}_W$.

**3. Aufgabe** (14 Punkte)

Sei $\alpha \in (0,\infty)$ und $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ für alle $x = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} \|x\|_2^{-\alpha}(x_1 \cdot x_2) & \text{für } (x_1,x_2) \neq (0,0), \\ 0 & \text{für } (x_1,x_2) = (0,0). \end{cases}$$

a) Zeige, dass die partiellen Ableitungen $\frac{\partial f}{\partial x_1}(0,0)$ und $\frac{\partial f}{\partial x_2}(0,0)$ für alle $\alpha \in (0,\infty)$ existieren.

b) Zeige, dass $f$ genau dann im Nullpunkt stetig ist, wenn $\alpha \in (0,2)$.

c) Sei $u = (u_1,u_2) \in \mathbb{R}^2$ mit $u_1 \neq 0$, $u_2 \neq 0$ und $\|u\|_2 = 1$. Zeige, dass die Richtungsableitung $\frac{\partial f}{\partial u}(0,0)$ für kein $\alpha \in [1,\infty)$ existiert.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)