Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski

Sommersemester 2008

www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

9. Übungsblatt zur VL Analysis II

Differentiation

Abgabe: 23.06.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe

Satz 7.2.8: Mittelwertsatz in Integralform für reellwertige Funktionen

Sei $U \subseteq X$ offen und $f : U \to \mathbb{R}$ eine stetig differenzierbare Funktion. Dann gilt

$$f(y) - f(x) = \int_0^1 f'(x + t(y-x))(y-x)\,\mathrm{d}t$$

für alle $x, y \in U$ mit $|[x,y]| \subseteq U$.

2. Aufgabe

Zeige: Die Funktion

$$f : \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto \frac{xy^2\sqrt{x^2+y^2}}{x^2+y^4}$$

lässt sich stetig, jedoch nicht differenzierbar auf $\mathbb{R}^2$ fortsetzen: trotzdem existieren alle Richtungsableitungen in $(0,0)$ und können mithilfe der Jacobi-Matrix berechnet werden.

3. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \quad (x,y) \mapsto f(x,y) := \begin{cases} 1 & \text{falls } y-1 = (x-1)^2 > 0, \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$

a) Zeige, dass alle Richtungsableitungen von f in $(1,1)$ existieren.

b) Zeige, dass f in $(1,1)$ nicht stetig ist.

c) Ist f differenzierbar in $(1,1)$?
Zeige, dass f in $(1,1)$ eine unstetige Richtungsableitung besitzt. Gib eine solche Richtung an, und beweise die Unstetigkeit der entsprechenden Richtungsableitung.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (12 Punkte)

Zeige mithilfe der Produkt- und Kettenregel, dass die folgenden Abbildungen differenzierbar sind und gib ihre Ableitungen an.

a) $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y, z) \mapsto (xz, \sin(x^2 + y^2), z)$

b) $g : L(V, W) \times L(U, V) \to L(U, W), \quad (A, B) \mapsto A \circ B,$
wobei U, V und W endlich-dimensionale Banachräume sind.

c) $f : U_1(0) := \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid \sqrt{x^2 + y^2} < 1\} \to \mathbb{R}^3, \quad (x, y) \mapsto (x, y, \sqrt{1 - x^2 - y^2}).$
Zeige weiterhin, dass $\langle f(p), D_v f(p)\rangle = 0$ für alle $p \in U_1(0)$ und $v \in \mathbb{R}^2$ gilt.
(*Hinweis:* $\langle x, y\rangle = x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3$)

2. Aufgabe (Kugelkoordinaten) (18 Punkte)

Sei $K : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad \begin{pmatrix} r \\ \varphi \\ \vartheta \end{pmatrix} \mapsto r \begin{pmatrix} \sin\vartheta\cos\varphi \\ \sin\vartheta\sin\varphi \\ \cos\vartheta \end{pmatrix}.$

a) Skizziere die Bildmengen der Ebenen $r = \text{const}$, $\varphi = \text{const}$ und $\vartheta = \text{const}$.

b) Berechne die Jacobi–Matrix von K. Ist K differenzierbar?

c) Sei $f : \mathbb{R}^3 \setminus \{0\} \to \mathbb{R}^3$, $(x, y, z) \mapsto \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}(xy, x, z)$.

Bestimme die Jacobi–Matrizen von f und $f \circ K|_{\{(r,\varphi,\vartheta)\in\mathbb{R}^3 | r\neq 0\}}$ und überprüfe die Kettenregel. Sind f und $f \circ K|_{\{(r,\varphi,\vartheta)\in\mathbb{R}^3 | r\neq 0\}}$ differenzierbar?

3. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$,

$$(x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{\sin x}{x} y & \text{für } x \neq 0, \\ y & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

a) In welchen Punkten ist f stetig?

b) Bestimme die partiellen Ableitungen von f in den Punkten des $\mathbb{R}^2$, in denen sie existieren.

c) In welchen Punkten ist f differenzierbar?

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)