Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2008
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

10. Übungsblatt zur VL Analysis II

Höhere Ableitungen, Satz von Schwarz

Abgabe: 30.06.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe
Zeige am Beispiel der Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $f(x,y) = (x^2, y^3)$, dass sich der Mittelwertsatz aus der Analysis I nicht auf Abbildungen aus $\mathbb{R}^m$ nach $\mathbb{R}^n$, $n > 1$ übertragen lässt.

2. Aufgabe
Gibt es zweimal partiell (nicht stetig) differenzierbare Funktionen, für die der Satz von Schwarz nicht gilt?

Betrachte hierzu die Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x,y) = \begin{cases} xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} & \text{für } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sonst.} \end{cases}$$

Zeige, dass die Funktion f zweimal partiell differenzierbar ist, aber

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2}(0,0) \neq \frac{\partial^2 f}{\partial x_2 \partial x_1}(0,0).$$

Ist f in $(0,0)$ stetig? Sind die ersten und zweiten partiellen Ableitungen von f stetig?

3. Aufgabe
Sei $y\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$, $(x_1,x_2) \mapsto (y_1,y_2) = \frac{1}{x_1^2+x_2^2}(-x_2,x_1)$.

Beweise die folgenden Behauptungen:

a) $\frac{\partial y_2}{\partial x_1} = \frac{\partial y_1}{\partial x_2}$

b) Es gibt keine differenzierbare Funktion $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}$ mit $f' = y$.

c) Für $f\colon \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\}) \to \mathbb{R}$, $(x_1,x_2) \mapsto -\arctan(\frac{x_1}{x_2})$ gilt $f' = y$.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (Richtungsableitung der Determinanten) (12 Punkte)

Sei $n \geq 1$. Betrachte die Abbildung

$$\det : \underbrace{\mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n}_{n-\text{mal}} \to \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_n) \mapsto \det(x_1, \ldots, x_n)$$

mit den Eigenschaften:

a) det ist n-linear

b) $\det(x_1, \ldots, x_n) = 0$, falls zwei der x_j gleich sind

c) $\det(e_1, \ldots, e_n) = 1$, wobei $e_1, \ldots, e_n$ die Einheitsvektoren im $\mathbb{R}^n$ bezeichnen.

Zeige, dass für ihre Richtungsableitung gilt:

$$D_B \det(A) = \det(A) \operatorname{Spur}(BA^{-1})$$

für alle $A = (a_1, \ldots, a_n)$, $B = (b_1, \ldots, b_n) \in \mathbb{R}^n \times \cdots \times \mathbb{R}^n$, so dass A^{-1} existiert.

2. Aufgabe (6 Punkte)

Berechne die Hesseschen Matrizen der folgenden Funktionen:

a) $f\colon (\mathbb{R} \setminus \{0\})^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto \frac{y}{x} + \frac{z}{y} - \frac{x}{z}$

b) $g\colon]0, \infty[^3 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto \frac{x\sqrt{z}}{y}$

3. Aufgabe (Rotation und Divergenz) (10 Punkte)

Sei $U \subseteq \mathbb{R}^n$ offen und $f : U \to \mathbb{R}^n$ eine partiell differenzierbare Funktion.
Die **Divergenz** von f ist definiert durch

$$\operatorname{div} f := \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f_i}{\partial x_i}.$$

Ist $n = 3$ und f zweimal stetig partiell differenzierbar, so ist die **Rotation** von f definiert durch

$$\operatorname{rot} f := \left(\frac{\partial f_3}{\partial x_2} - \frac{\partial f_2}{\partial x_3}, \frac{\partial f_1}{\partial x_3} - \frac{\partial f_3}{\partial x_1}, \frac{\partial f_2}{\partial x_1} - \frac{\partial f_1}{\partial x_2} \right).$$

Beweise die folgenden Aussagen und gib dabei die Bedingungen für die Funktionen f und φ an, damit die unteren Audrücke definiert sind.

a) $\operatorname{rot}(\nabla f) = 0$

b) $\operatorname{div}(\operatorname{rot} f) = 0$

c) $\operatorname{div}(\nabla f) = \Delta f$

d) (gestrichen! - d.h. nicht zu bearbeiten)

e) $\operatorname{div}(\varphi \cdot f) = \varphi \cdot \operatorname{div} f + f \cdot \nabla\varphi$

f) $\Delta(\varphi \cdot f) = \varphi \cdot \Delta f + 2\langle \nabla\varphi, \nabla f \rangle + f \cdot \Delta\varphi.$

4. Aufgabe (12 Punkte)

a) Bestimme alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, für die gilt

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1 \partial x_2} = 0.$$

b) Welche Lösungen hat die „Wellengleichung“:

$$f_{xx} - f_{tt} = 0\,?$$

Wende hierzu a) auf $f \circ \lambda$ mit $\lambda\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, $(u, v) \mapsto (u + v, u - v)$ an.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)