Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2008
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

11. Übungsblatt zur VL Analysis II

Satz von Taylor, lokale Extrema
Abgabe: 07.07.2008 **vor Beginn** der Übung

Übung

1. Aufgabe
Untersuche die Funktion $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x, y) \mapsto x^2 + (1 - x)^3 y^2$ auf lokale Extrema.
Nimmt f ihr Maximum oder ihr Minimum an?

2. Aufgabe
Sei $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$ und G offen. Sei $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, die auf G differenzierbar ist. Beweise die folgenden Behauptungen.

a) Sei G eine beschränkte Menge.
Falls $f'(p) \neq 0$ für alle $p \in G$ gilt, so nimmt f ihr Maximum <u>und</u> ihr Minimum auf ∂G an.
Falls $f'(p) = 0$ für genau ein $p \in G$ gilt, so nimmt f ihr Maximum <u>oder</u> ihr Minimum auf ∂G an.

b) Sei G eine unbeschränkte Menge. Zusätzlich existiere ein $c \in \mathbb{R}$, so dass $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = c$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{G}$ mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$ gilt.
Falls $f'(p) \neq 0$ für alle $p \in G$ gilt, so ist c ist das Supremum oder das Infimum von f <u>oder</u> f nimmt ihr Maximum und ihr Minimum auf ∂G an. Ist c das Supremum (Infimum) von f, so nimmt f ihr Minimum (Maximum) auf ∂G an.
Falls $f'(p) = 0$ für genau ein $p \in G$ gilt, so ist c ist das Supremum oder das Infimum von f <u>oder</u> f nimmt ihr Maximum oder ihr Minimum auf ∂G an.

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)
Sei G eine offene unbeschränkte Menge mit $\emptyset \neq G \subseteq \mathbb{R}^n$. Sei $f : \overline{G} \to \mathbb{R}$ eine stetige Abbildung, die auf G differenzierbar ist. Außerdem gelte $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = +\infty$ für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq \overline{G}$ mit $\lim_{n\to\infty} \|x_n\| = +\infty$.
Zeige, dass f ihr Minimum in $\overline{G}$ annimmt.

2. Aufgabe (8 Punkte)
Für $c \in \mathbb{R}^+$ sei $M = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z \geq 0, x + y + z \leq 4c\}$ und

$$f : M \to \mathbb{R}, \quad (x, y, z) \mapsto xyz(4c - x - y - z).$$

Bestimme den größten Wert der Funktion f.
Hinweis: Zeige hierzu zunächst, dass das Maximum von f im Inneren von M liegen muss.

3. Aufgabe (12 Punkte)

Bestimme alle lokalen und globalen Extrema der folgenden Funktionen:

$$f : \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x, y, z > 0\} \to \mathbb{R}, \qquad (x, y, z) \mapsto \frac{1}{xyz}$$
$$g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x^3 - y^3 - 3(x - y)$$
$$h : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}, \qquad (x, y) \mapsto x^3 + 8y^3 - 6xy$$

Gib ausserdem das Taylorpolynom 2. Grades von h in allen seinen lokalen Extrempunkten an.

4. Aufgabe (10 Punkte)

Für $\varepsilon > 0$ seien $\gamma\colon\ ]-\varepsilon, \varepsilon[\to \mathbb{R}^3$ und $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ differenzierbare Abbildungen.
Zeige, dass der Betrag des Anstiegs von f entlang γ (d.h. der Betrag des Anstiegs von $f \circ \gamma$) im Punkt $\gamma(0)$ kleiner oder gleich $\|\nabla f(\gamma(0))\| \|\gamma'(0)\|$ ist.
Wann ist der Anstieg gleich $\|\nabla f(\gamma(0))\| \|\gamma'(0)\|$? Gib ein Beispiel für eine solche Abbildung γ an.
Hinweis: Für das Standardskalarprodukt im $\mathbb{R}^n$ gilt: $|\langle a, b\rangle| \leq \|a\| \|b\|$ für alle $a, b \in \mathbb{R}^n$.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)