Technische Universität Berlin
Institut für Mathematik
Prof. Dr. P. Wittbold
Martha Hubski
Sommersemester 2008
www.math.tu-berlin.de/Vorlesungen/SoSe08/Analysis2/

12. Übungsblatt zur VL Analysis II

Implizite Funktionen, Umkehrsatz

Abgabe: 14.07.2008 **vor Beginn** der Übung

Dies ist das letzte Übungsblatt des Semesters!

Klausur

Die Scheinklausur findet am Donnerstag, den 18.07.08 in der Zeit 10-12 Uhr statt und dauert 120 Minuten. Die Raumaufteilung nach Anfangsbuchstaben des Nachnamens lautet:

A-N im MA 001 und O-Z im MA 004.

Beachtet bitte die weiteren Hinweise zur Klausur auf unserer Homepage.

Übung

1. Aufgabe

Beweise den Satz 7.5.4:
Sei $U \subseteq X$ offen, $f : U \to Y$ stetig differenzierbar und $f'(x)$ invertierbar für alle $x \in U$.
Dann gilt:

a) f ist eine offene Abbildung (d. h. $f(O)$ is offen für jede offene Menge $O \subseteq U$.)

b) Die Abbildung $\|\cdot\| \circ f : U \to \mathbb{R}$ besitzt kein (globales) Maximum in U, und falls $f(x) \neq 0$ für alle $x \in U$ auch kein (globales) Minimum in U.

c) Falls f injektiv auf U ist, dann ist $f^{-1} : f(U) \to U$ stetig differenzierbar.
(f heisst dann stetiger *Diffeomorphismus* von $f(U)$ nach U.)

2. Aufgabe

Zeige, dass

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} x^2 - y^2 \\ x^2 + y^2 \end{pmatrix}$$

in $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ genau dann lokal umkehrbar ist, wenn $x_0 y_0 \neq 0$ ist.

3. Aufgabe

Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gegeben durch

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} + x^2 \sin \frac{1}{x} & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

Zeige, dass $Df(0)$ existiert und invertierbar ist, aber f selbst in keiner Umgebung von Null umkehrbar ist. Wie ist diese Tatsache mit dem Umkehrsatz verträglich?

Hausaufgaben

1. Aufgabe (10 Punkte)

Sei $F : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ definiert durch

$$F(x,y,z) = \begin{pmatrix} x\cosh z + y\sinh z - e^z - 1 \\ x\sinh z + y\cosh z - e^z + 1 \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass $F(x,y,z) = 0$ nach x und y lokal auflösbar ist, indem

a) das System $F(x,y,z) = 0$ direkt nach (x,y) aufgelöst wird,

b) der Satz über implizite Funktionen angewendet wird.

2. Aufgabe (8 Punkte)

Sei

$$f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3, \quad f(x,y,z) = \begin{pmatrix} x+y+z \\ xy+yz+zx \\ xyz \end{pmatrix}.$$

Zeige, dass f in $(x_0,y_0,z_0) \in \mathbb{R}^3$ genau dann lokal invertierbar ist, wenn $(x_0-y_0)(y_0-z_0)(z_0-x_0) \neq 0$ gilt. Bestimme in diesen Fällen die Jacobi–Matrix der Umkehrabbildung an der Stelle $f(x_0,y_0,z_0)$.

3. Aufgabe (8 Punkte)

Sei

$$f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}, \quad f(x,y) = \begin{pmatrix} \frac{x}{x^2+y^2} \\ \frac{y}{x^2+y^2} \end{pmatrix}.$$

Bestimme die Ableitung $Df(p)$ (für alle Punkte $p \in \mathbb{R}^2$, wo diese existiert) und zeige, dass f lokal invertierbar ist. Ist f auch global invertierbar? Gib in diesem Fall die Umkehrabbildung f^{-1} an.

4. Aufgabe (14 Punkte)

a) Sei $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, $(x,y) \mapsto F(x,y)$ eine zweimal stetig differenzierbare Funktion. Außerdem existiere nach dem Satz über implizite Funktionen eine zweimal stetig differenzierbare Funktion $f : U \to \mathbb{R}$ mit $\emptyset \neq U \subseteq \mathbb{R}$ offen, so dass $F(x, f(x)) = 0$ für alle $x \in U$ gilt.

(i) Differenziere die Gleichung $F(x,f(x)) = 0$ nach x und gewinne hierdurch einen Ausdruck für die Ableitung f' von f für $x \in U$.

(ii) Bestimme analog einen Ausdruck für f''.

(iii) Zeige, dass für kritische Punkte $x_0 \in U$ von f gilt:

$$f''(x_0) = -\frac{\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}(x_0, f(x_0))}{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, f(x_0))}\ .$$

b) Zeige, dass die Gleichung $\frac{1}{5}y^5 + y + x^3 + \frac{3}{2}x^2 - 6x = 0$ nach y auflösbar ist. Berechne mit Hilfe von Teil a) die lokalen Extremwerte dieser Funktion.

(Gesamtpunktzahl: 40 Punkte)